

G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより5ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものと及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ヨ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) ある商店街のくじは、「A 賞」「B 賞」「C 賞」「はずれ」が、それぞれ $\frac{1}{4}$ の確率ででるといふ。4 人がそれぞれ 1 回ずつこのくじを引くとする。

(a) 誰も「はずれ」を引かない確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ウ} & \text{エ} & \text{オ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(b) 少なくとも 1 人が「A 賞」を引く確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{カ} & \text{キ} & \text{ク} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ケ} & \text{コ} & \text{サ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(c) 4 人のうち、誰か 1 人だけが「A 賞」を引く確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{シ} & \text{ス} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{セ} & \text{ソ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(d) 「A 賞」「B 賞」「C 賞」「はずれ」がそれぞれ 1 つずつ出る確率は $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{チ} & \text{ツ} \\ \hline \end{array}}$ である。

右のページは白紙です。

(2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x) = 1 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_n(x) = \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-1}(t) \sin t \, dt \quad \left(n = 1, 2, 3, \dots, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって定める。このとき、

$$c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-1}(t) \sin t \, dt$$

とおくと、

$$c_1 = \boxed{\text{テ}}$$

$$c_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} c_{n-1}$$

である。したがって

$$c_n = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \cdot \left(-\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\right)^{n-1}$$

であり、各 x に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{x}{2} - \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} \cos x$$

となる。

右のページは白紙です。

(3) 実数 a に対し, x の方程式

$$\log_2 |x - a| = \log_4 (x - 2)$$

を考える。この方程式を満たす実数の個数を a の値で分類すると,

(a) $a < \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ のとき 0 個,

(b) $a = \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$, $\boxed{\text{ヤ}}$ のとき $\boxed{\text{ユ}}$ 個,

(c) (a), (b) 以外のとき $\boxed{\text{ヨ}}$ 個である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -x^2 + (1+t^2)x - t^2$$

と定める。座標平面において、原点 O から放物線 $y = f(x)$ へ引いた接線のうち、接点の x 座標が正のものを考える。その接点を $P(p, f(p))$ とおく。

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) 放物線 $y = f(x)$ の $x \leq p$ の部分、 x 軸、直線 $x = p$ で囲まれる図形の面積を S_1 とする。 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 線分 OP 、 x 軸、直線 $x = p$ で囲まれる図形の面積を S_2 とし、(2) の S_1 に対して $S = S_2 - S_1$ とおく。 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき S を最大にする t の値を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 以下の問いに答えよ。(n は自然数とする。)

(1) $x = a \tan \theta$ とおくことにより、定積分

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$$

を求めよ。

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{4n^2 + k^2}$$

を求めよ。

(3) (a) 実数 $x \geq 0$ に対して

$$\frac{1}{1+x^2} - x^{2n+2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k \leq \frac{1}{1+x^2} + x^{2n+2}$$

を示せ。

(b) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

により定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。