

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 0 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (2) | ク | ケ | コ |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 2 | 2 | 2 |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (3) | サ | シ | ス | セ |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4 | 4 | 2 | 2 |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (4) | ソ | タ |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 6 | 4 |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
| (5) | チ |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 1 |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |

【解説】

(1)

$A = \{0, 1, 3\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $C = \{0, 3\}$  であるとき、(P) の 3 つの条件をすべて満たす  $n$  桁の整数のうち、1 の位の数字が 0 でないものは

- ・最上位の桁の数字は 1 である
- ・すべての桁の数が 1 または 3 である
- ・もし、1 の位の桁以外のある数字が 3 であれば、その桁の右側にあるすべての数字の桁の数字も 3 である

という条件を満たす整数である。この条件を満たす整数について、各  $n$  の値で考えると

- $n = 2$  : 11, 13
- $n = 3$  : 111, 113, 133
- $n = 4$  : 1111, 1113, 1133, 1333
- $n = 5$  : 11111, 11113, 11133, 11333, 13333

となるから、 $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 4$ ,  $a_5 = 5$  であることがわかる。また、同様に考えることで

$a_n = n \quad (n \geq 2)$

となるから、 $\sum_{n=2}^{28} a_n$  の値は

$$\sum_{n=2}^{28} a_n = \sum_{n=2}^{28} n = \frac{1}{2} \cdot (2 + 28) \cdot 27 = 405$$

と求まる。

(2)

$A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{0\}$ ,  $C = \{0, 1\}$  であるとき、(P) の 3 つの条件をすべて満たす  $n$  桁の整数のうち、1 の位の数字が 0 でないものは

- ・最上位の桁の数字は 1 である
- ・すべての桁の数が 1 または 2 である
- ・1 の位の桁の数字のみ 2 となりうる

という条件を満たす整数である。この条件を満たす整数について、各  $n$  の値で考えると

- $n = 3$  : 111, 112
- $n = 4$  : 1111, 1112
- $n = 5$  : 11111, 11112

となるから、 $b_3 = b_4 = b_5 = 2$  であることがわかる。

(3)

$A = \{0, 2, 3\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $C = \{0, 1\}$  であるとき、(P) の 3 つの条件をすべて満たす  $n$  桁の整数のうち、1 の位の数字が 0 でないものは

- ・最上位の桁の数字は 1 である
- ・1 の位以外の桁の数字が 1 であるとき、その右側の桁の数字は 2 または 3 である。
- ・1 の位以外の桁の数字が 2 または 3 であるとき、その右側の桁の数字は 1 である。

という条件を満たす整数である。この条件を満たす整数について、各  $n$  の値で考えると

- $n = 4$  : 1212, 1213, 1312, 1313
- $n = 5$  : 12121, 12131, 13121, 13131

となるから、 $c_4 = c_5 = 4$  であることがわかる。また、同様に考えることで

$n$  が偶数のとき、 $c_n = 2^{\frac{n}{2}} \quad (n \geq 2)$

$n$  が奇数のとき、 $c_n = c_{n-1} \quad (n \geq 3)$

となるから、 $c_n$  の値は単調増加し、さらに

$c_{20} = c_{21} = 2^{10} = 1024$

$c_{22} = 2^{11} = 2048$

となるため、 $c_n > 2016$  を満たす 2 以上の自然数  $n$  のうち最小のものは  $n = 22$  であることがわかる。

(4)

(P) の 3 つの条件をすべて満たす 2 桁の整数が 10 だけになるとき、集合  $A$  は 0 のみを含み、集合  $B, C$  は少なくとも 0 を含めばよい。集合  $B, C$  を与える方法は、1, 2, 3 がそれぞれの集合に含まれるか否かを考えることで、それぞれ

$2^3 = 8$  [通り]

となるから、求める場合の数は

$1 \cdot 8 \cdot 8 = 64$  [通り]

である。

(5)

(P) の 3 つの条件をすべて満たす 3 桁の整数が 100, 120, 130 の 3 つだけになるとき、集合  $A$  は

$A = \{0, 2, 3\}$

となり、集合  $B, C$  は 0 のみを含む。したがって、求める場合の数は

1 [通り]

である。



2

任意の複素数  $z$  に対して

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と1通りに表すことができる。このとき、方程式  $z^n = 64i$  ( $n \geq 1$ ) の解は、ド・モアブルの公式を用いることにより

$$\begin{aligned} z^n &= 64i \\ \Leftrightarrow r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) &= 64i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r^n \cos n\theta = 0 \\ r^n \sin n\theta = 64 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 64 \\ \cos n\theta = 0 \\ \sin n\theta = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow r &= 2^{\frac{6}{n}}, \theta = \frac{1}{2n}\pi + \frac{2}{n}(j-1)\pi \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\therefore z = z_j \quad (\text{ただし, } z_j = 2^{\frac{6}{n}}(\cos \theta_j + i \sin \theta_j), \theta_j = \frac{1}{2n}\pi + \frac{2}{n}(j-1)\pi, (j=1, 2, \dots, n))$$

となることがわかる。このうち、実部の値が最大であるものは、 $\min\{\theta_j, 2\pi - \theta_j\}$  が最小にな

るような  $j$  の値に対応する  $z = z_j$  の値であり

$$\begin{aligned} \min\{\theta_1, 2\pi - \theta_1\} &= \theta_1 = \frac{1}{2n}\pi \\ \min\{\theta_n, 2\pi - \theta_n\} &= 2\pi - \theta_n = \frac{3}{2n}\pi \end{aligned}$$

となることから

$$A_n = z_1$$

であることがわかる。また、実部の値が最小であるものは、 $|\pi - \theta_j|$  が最小になるような  $j$  の

値に対応する  $z = z_j$  の値であり

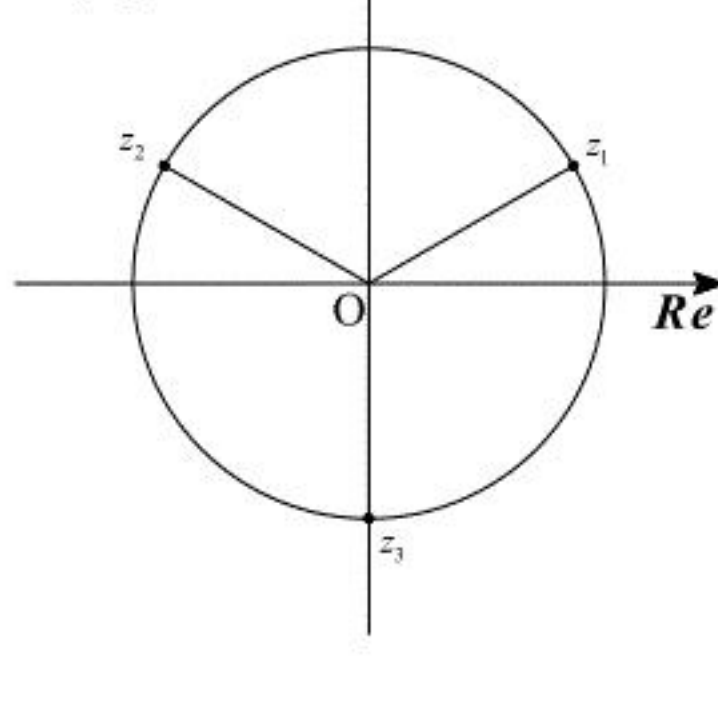
$$\begin{aligned} n \text{ が奇数のとき} : |\pi - \theta_{\frac{n+1}{2}}| &= \frac{1}{2n}\pi, |\pi - \theta_{\frac{n+3}{2}}| = \frac{3}{2n}\pi \\ n \text{ が偶数のとき} : |\pi - \theta_{\frac{n}{2}}| &= \frac{3}{2n}\pi, |\pi - \theta_{\frac{n}{2}+1}| = \frac{1}{2n}\pi \end{aligned}$$

となることから

$$n \text{ が奇数のとき } B_n = z_{\frac{n+1}{2}}, n \text{ が偶数のとき } B_n = z_{\frac{n}{2}+1}$$

であることがわかる。

(1)



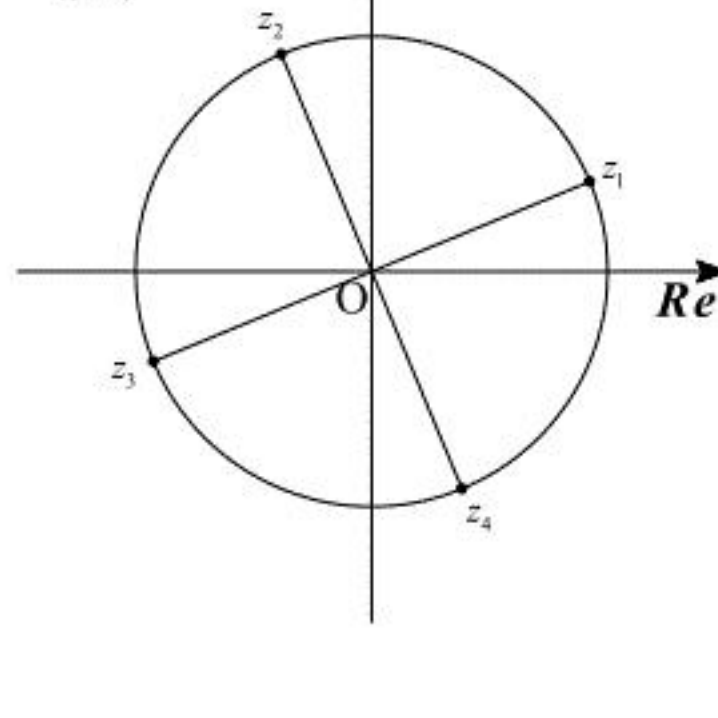
上の考察より、 $A_3, B_3$  の値は

$$\begin{aligned} A_3 = z_1 &= 2^2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} + 2i \\ B_3 = z_2 &= 2^2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) \right) = -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A_3 = 2\sqrt{3} + 2i, B_3 = -2\sqrt{3} + 2i$$

(2)



上の考察より、 $A_4, B_4$  の値は

$$\begin{aligned} A_4 = z_1 &= 2^{\frac{3}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\ B_4 = z_3 &= 2^{\frac{3}{2}} \left( \cos \left( \frac{\pi}{8} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + \pi \right) \right) = -2^{\frac{3}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 $\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}$  の値は、三角関数の半角の公式より

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

であることがわかるから、求める値は

$$\begin{aligned} A_4 &= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}i \\ B_4 &= -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A_4 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}i, B_4 = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}i$$

(3)

上の考察より、方程式  $z^n = 64i$  の解のうち虚部が正であるような解は

$$2^{\frac{6}{n}} \sin \theta_j > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta_j < \pi$$

を満たすような  $j$  の値に対応する  $z = z_j$  の値であり、ここで

$$n \text{ が奇数のとき} : 0 < \theta_j \left( = \frac{1}{2n}\pi + \frac{2}{n}(j-1)\pi \right) < \pi \Leftrightarrow j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$$

$$n \text{ が偶数のとき} : 0 < \theta_j \left( = \frac{1}{2n}\pi + \frac{2}{n}(j-1)\pi \right) < \pi \Leftrightarrow j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

となるから、このような解の個数  $L_n$  は

$$L_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad L_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(4)

$n = 2m + 1$  とおく。このとき、上の考察より、ド・モアブルの公式を用いて

$$\begin{aligned} A_n^3 - B_n^3 &= z_1^3 - z_{m+1}^3 \\ &= 2^{\frac{18}{n}} (\cos 3\theta_1 + i \sin 3\theta_1) - 2^{\frac{18}{n}} (\cos 3\theta_{m+1} + i \sin 3\theta_{m+1}) \\ &= 2^{\frac{18}{n}} \left( \cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right) + i \sin \left( \frac{3}{2n}\pi \right) \right) - 2^{\frac{18}{n}} \left( \cos \left( 3\pi - \frac{3}{2n}\pi \right) + i \sin \left( 3\pi - \frac{3}{2n}\pi \right) \right) \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{18}{n}} \cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n^4 - B_n^4 &= z_1^4 - z_{m+1}^4 \\ &= 2^{\frac{24}{n}} (\cos 4\theta_1 + i \sin 4\theta_1) - 2^{\frac{24}{n}} (\cos 4\theta_{m+1} + i \sin 4\theta_{m+1}) \\ &= 2^{\frac{24}{n}} \left( \cos \left( \frac{2}{n}\pi \right) + i \sin \left( \frac{2}{n}\pi \right) \right) - 2^{\frac{24}{n}} \left( \cos \left( 4\pi - \frac{2}{n}\pi \right) + i \sin \left( 4\pi - \frac{2}{n}\pi \right) \right) \\ &= 2 \cdot 2^{\frac{24}{n}} \sin \left( \frac{2}{n}\pi \right) i \end{aligned}$$

となるから、 $\alpha_m, \beta_m$  の値は

$$\alpha_m = 2 \cdot 2^{\frac{24}{n}} \sin \left( \frac{2}{n}\pi \right), \beta_m = 2 \cdot 2^{\frac{18}{n}} \cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right)$$

と求まる。よって、求める極限值  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\alpha_m}{\beta_m}$  は

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\alpha_m}{\beta_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \cdot 2 \cdot 2^{\frac{24}{n}} \sin \left( \frac{2}{n}\pi \right)}{2 \cdot 2^{\frac{18}{n}} \cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2^{\frac{6}{n}}}{\cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right)} \cdot \left( m \cdot \frac{2}{n}\pi \right) \cdot \frac{\sin \left( \frac{2}{n}\pi \right)}{\frac{2}{n}\pi} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{6}{n}}}{\cos \left( \frac{3}{2n}\pi \right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2}{n}\pi \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( \frac{2}{n}\pi \right)}{\frac{2}{n}\pi} \\ &= 1 \cdot \pi \cdot 1 \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\alpha_m}{\beta_m} = \pi$$

(5)(a)

上の考察より、 $n = 2\ell$  のとき  $L_{2\ell} = \ell$  であり、 $j = k$  とすれば

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1}{2n}\pi + \frac{2}{n}(k-1)\pi \\ &= \frac{1+4(k-1)}{4\ell}\pi \\ &= \frac{4k-3}{4\ell}\pi \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \theta_k = \frac{4k-3}{4\ell}\pi$$

(5)(b)

上の考察と(a)の結果より、 $z_k$  の虚部  $\gamma_k$  は

$$\begin{aligned} \gamma_k &= r \sin \theta_k \\ &= 2^{\frac{3}{\ell}} \sin \frac{4k-3}{4\ell}\pi \end{aligned}$$

と表せることがわかる。したがって、極限值  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{L_{2\ell}} \sum_{k=1}^{L_{2\ell}} \gamma_k$  は区分求積法を用いることにより

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{L_{2\ell}} \sum_{k=1}^{L_{2\ell}} \gamma_k &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( 2^{\frac{3}{\ell}} \sin \frac{4k-3}{4\ell}\pi \right) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\{ 2^{\frac{3}{\ell}} \cdot \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \sin \left( \frac{k}{\ell}\pi - \frac{3}{4\ell}\pi \right) \right) \right\} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\{ 2^{\frac{3}{\ell}} \cdot \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \sin \frac{k}{\ell}\pi \cos \frac{3}{4\ell}\pi - \cos \frac{k}{\ell}\pi \sin \frac{3}{4\ell}\pi \right) \right\} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\{ 2^{\frac{3}{\ell}} \cos \frac{3}{4\ell}\pi \cdot \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \sin \frac{k}{\ell}\pi \right) - 2^{\frac{3}{\ell}} \sin \frac{3}{4\ell}\pi \cdot \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \cos \frac{k}{\ell}\pi \right) \right\} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{3}{\ell}} \cos \frac{3}{4\ell}\pi \right) \cdot \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \sin \frac{k}{\ell}\pi \right) - \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{3}{\ell}} \sin \frac{3}{4\ell}\pi \right) \cdot \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \cos \frac{k}{\ell}\pi \right) \\ &= 1 \cdot \int_0^1 \sin \pi x dx - 0 \cdot \int_0^1 \cos \pi x dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{L_{2\ell}} \sum_{k=1}^{L_{2\ell}} \gamma_k = \frac{2}{\pi}$$