

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ						
		1	3	1	3						
	(b)	オ	カ	キ	ク						
		2	4	0	4						
	(c)	ケ	コ								
4		3									
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	あ	い	う	
	3	2	3	5	1	2	0	-	+	-	
(3)	(a)	ツ									
		2									
	(b)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ				
		3	3	2	3	3	2				
	(c)	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ					
2, 6(※)		2	2	3							

※順不同

※順不同

【解説】

(1)(a)

円 C は中心を原点とし、半径が 2 の円であるから、 C と ℓ が共有点をもつような a の値の範囲は、点と直線の距離公式より

$$\begin{aligned} \frac{|a \cdot 0 - 0 - 4a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} &\leq 2 \\ \Leftrightarrow 4a^2 &\leq a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} &\leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求まる。

(1)(b)

C と ℓ が 2 点で交わる時、その交点の x 座標を x_1, x_2 とおく。このとき、点 P の座標は直線 ℓ 上にあることから

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, a\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - 4\right)\right) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。また、 x_1, x_2 は C と ℓ の式を連立してできた 2 次方程式

$$x^2 + \{a(x - 4)\}^2 = 4 \Leftrightarrow (a^2 + 1)x^2 - 8a^2x + 16a^2 - 4 = 0$$

の解であるから、解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{8a^2}{a^2 + 1} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入することにより、点 P の座標は

$$P\left(\frac{4a^2}{a^2 + 1}, \frac{-4a}{a^2 + 1}\right)$$

と表せることがわかり、これは C と ℓ が接するときも成り立つ。ここで、 X, Y を

$$X = \frac{4a^2}{a^2 + 1}, Y = \frac{-4a}{a^2 + 1}$$

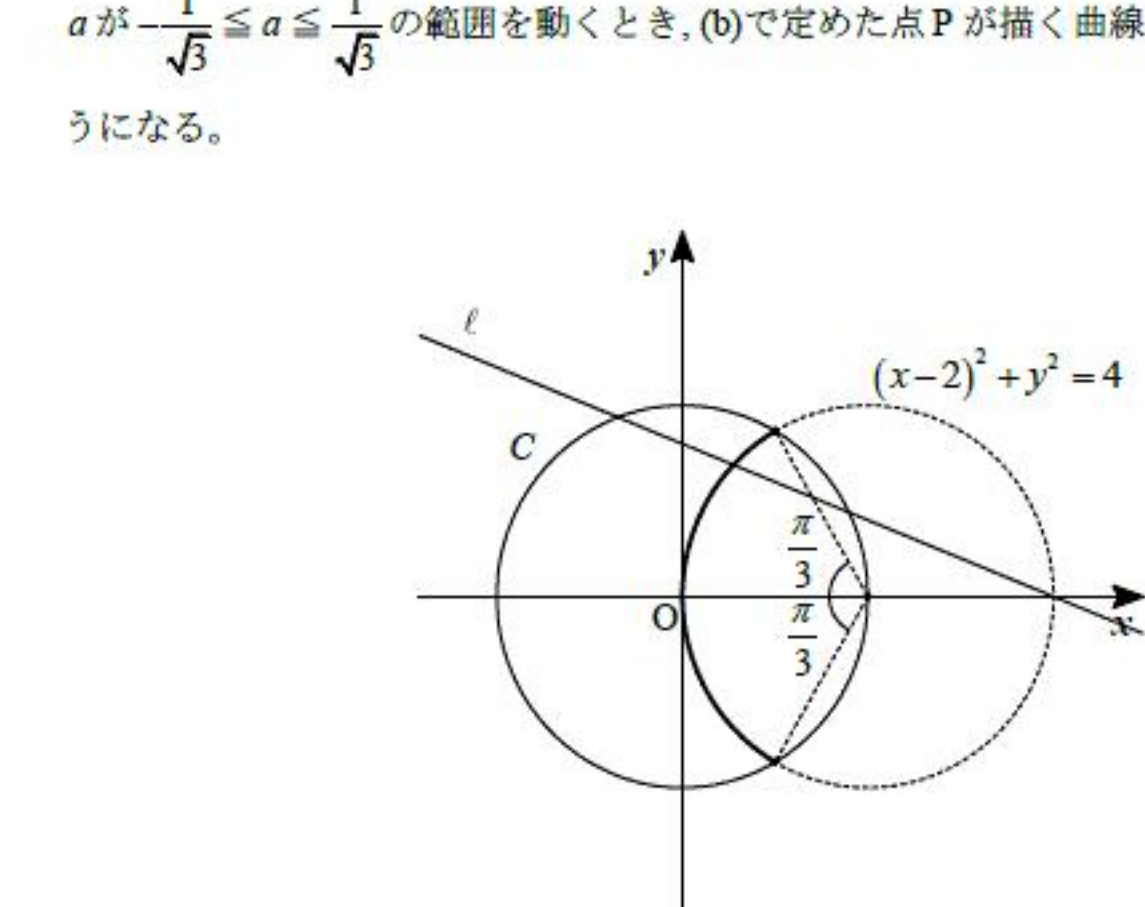
とおき、 a を消去するべく変形すると

$$\begin{aligned} (X - 2)^2 + Y^2 &= \left(\frac{2a^2 - 2}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-4a}{a^2 + 1}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{(a^2 - 1)^2 + 4a^2}{(a^2 + 1)^2} \\ &= 4 \\ \therefore \frac{(X - 2)^2}{4} + \frac{Y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

となるから、点 P は曲線 $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上にあることがわかる。

(1)(c)

a が $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲を動くとき、(b) で定めた点 P が描く曲線は以下の図の太線部のようになる。



太線部は円の一部であり、この円弧の中心角の大きさは $\frac{2}{3}\pi$ となるから、点 P が描く曲線の

長さは

$$2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

と求まる。

(2)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (ax^2 + bx + c)f(x) dx \\ &= \int_0^1 \{ax^2 + (ap + b)x^4 + (aq + bp + c)x^3 + (ar + bq + cp)x^2 + (br + cq)x + cr\} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}ax^6 + \frac{1}{5}(ap + b)x^5 + \frac{1}{4}(aq + bp + c)x^4 + \frac{1}{3}(ar + bq + cp)x^3 + \frac{1}{2}(br + cq)x^2 + crx \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}(ap + b) + \frac{1}{4}(aq + bp + c) + \frac{1}{3}(ar + bq + cp) + \frac{1}{2}(br + cq) + cr \\ &= a\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{3}r\right) + b\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r\right) + c\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q + r\right) \end{aligned}$$

と計算できる。これがすべての実数 a, b, c について 0 であるのは

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{5}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{3}r = 0 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q + r = 0 \end{cases}$$

が成り立つときであるから、求める実数 p, q, r は、この連立方程式を解いて

$$(p, q, r) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{20}\right)$$

であることがわかる。

(3)(a)

三角形 ABC は $AB = AC = \sqrt{3}$ 、 $BC = 2\sqrt{2}$ の二等辺三角形であるから、その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

と求まる。

(3)(b)

3 点 A, B, C を通る平面の方程式は $x + y = 0$ であり、この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ の 1 つとして

$$\vec{n} = (1, 1, 0)$$

ととることができるから、この平面が直線 DP に垂直になるような a, b の値は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} &\parallel \vec{n} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a + 2b - 2 = \frac{2}{a + b} - 2 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + 6a + 6 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \\ \therefore (a, b) &= (-3 - \sqrt{3}, 2), (-3 + \sqrt{3}, 2) \end{aligned}$$

と求まる。

(3)(c)

$a = -3 - \sqrt{3}$ 、 $b = 2$ のとき

$$\overrightarrow{DP} = (-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, 0)$$

であるから、線分 DP の長さは

$$DP = \sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

と求まる。また、平面 ABC の方程式は $x + y = 0$ であり、点 D, P について、 $x + y$ の値は

$$\text{点 } D : 2 + 2 > 0, \text{ 点 } P : (-1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3}) < 0$$

となるから、点 D, P は平面 ABC に関して反対側にあることがわかる。したがって、四面体 $ABCD$ と四面体 $ABCP$ の体積の和は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot DP = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

(1)

x, y を実数として

$$z = x + yi$$

とおくと、実部、虚部を比較することで

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

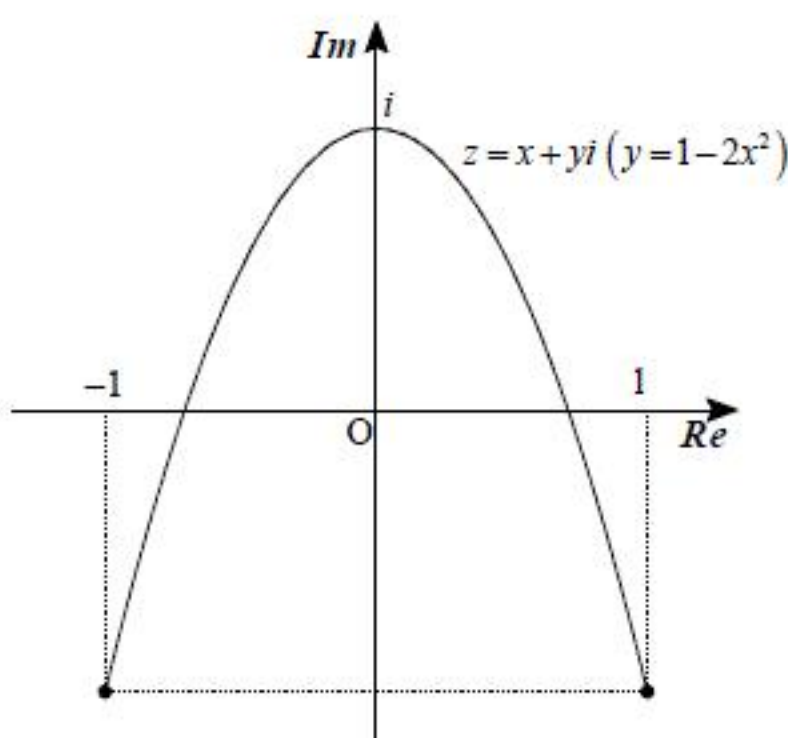
となる。よって、 t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動くとき、三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned} y &= \cos 2t \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ &= 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

であり、 x のとりうる値の範囲は

$$-1 \leq x \leq 1$$

であることがわかる。したがって、求める曲線の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

(2)

点 z が(1)で求めた曲線上を動くとき、 $|z|$ は

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (1 - 2x^2)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 - 3x^2 + 1} \\ &= \sqrt{4\left(x^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}} \end{aligned}$$

と表せる。よって、 $-1 \leq x \leq 1$ ($\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$) において $|z|$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{7}}{4} \leq |z| \leq \sqrt{2}$$

であることがわかる。

$$(答) \frac{\sqrt{7}}{4} \leq |z| \leq \sqrt{2}$$

(3)

以下、複素数 w 、実数 θ に対して

複素数 $(\cos \theta + i \sin \theta)w$ は、複素数 w を原点中心に θ だけ回転した複素数となることに注意する。 $w_t = \sin t + i \cos 2t$ とおき、 t を固定すると

$$z = (\cos s + i \sin s)w_t$$

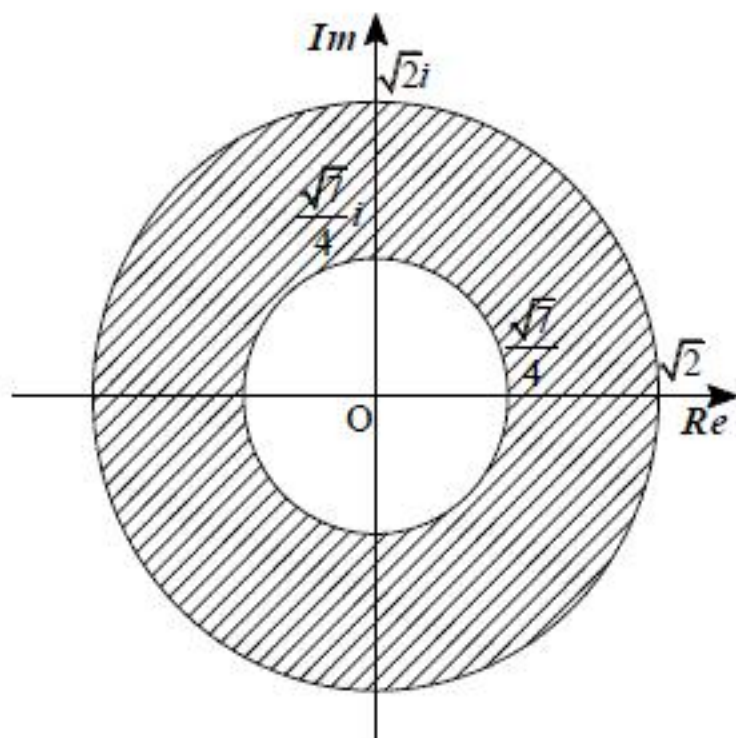
について、 s が $0 \leq s < 2\pi$ の範囲を動くとき、点 z が描く曲線は

$$|z| = |w_t| : \text{原点を中心とし、半径 } |w_t| \text{ の円}$$

となる。したがって、 t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動くとき、点 z が動いてできる領域を表す式は、(2)の結果より

$$\frac{\sqrt{7}}{4} \leq |z| \leq \sqrt{2}$$

であることがわかる。この領域を複素数平面上に図示すると、以下の図の斜線部のようになる。ただし、境界をすべて含む。



(答) 前図(ただし、境界をすべて含む)

3

(1)

点 $A(a_1, a_2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$ について

$$AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, AC = \sqrt{(a_1 - 1)^2 + a_2^2}$$

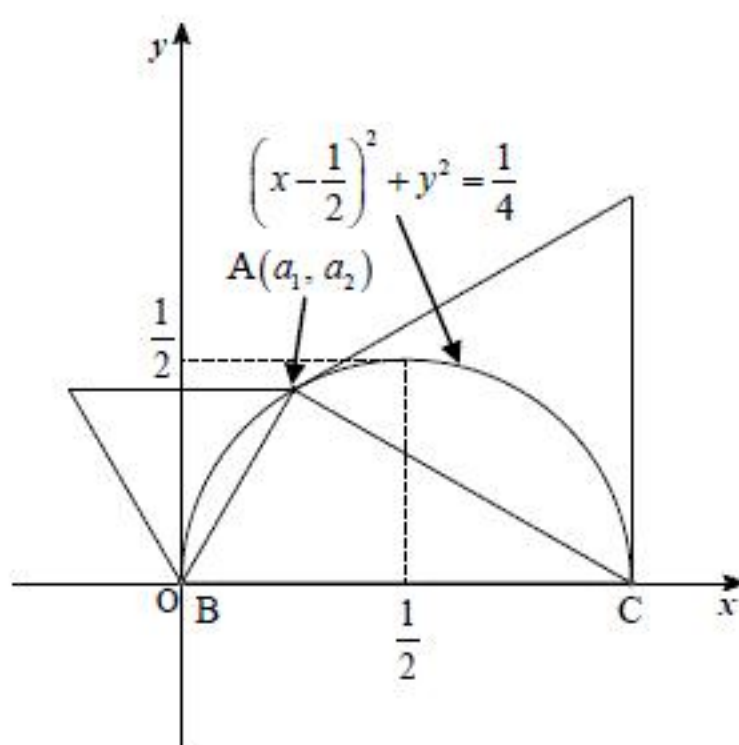
である。 $a_2 > 0$ のとき、 $AB \perp AC$ が成立するための必要十分条件は、 $\triangle ABC$ が $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形となることであり、これは三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2) + \{(a_1 - 1)^2 + a_2^2\} &= 1 \\ \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1^2 + a_2^2 - a_1 = 0$

(2)



1 辺の長さが 1 の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であることに注意すると、 M は

$$\begin{aligned} M &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot a_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot BC^2 + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot a_2 \\ &= \frac{1}{2} a_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と表せることがわかる。ここで、(1) の式を満たすとき

$$a_1^2 + a_2^2 - a_1 = 0 \Leftrightarrow \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + a_2^2 = \frac{1}{4}$$

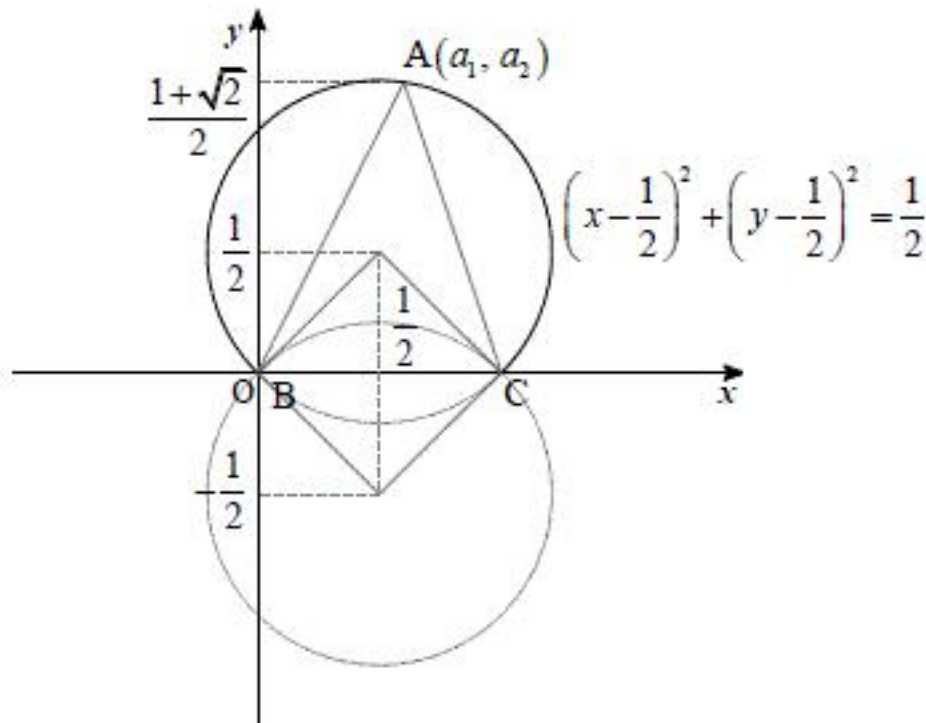
と変形できるから、 a_2 のとりうる値の範囲は $0 < a_2 \leq \frac{1}{2}$ となる。したがって、 M のとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < M \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{4} < M \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$

(3)



$\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ のとき、三角形 ABC の外接円の半径 R は、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となり、一定である。ここで、2 点 B, C を通り、半径が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

であるが、 $a_2 > 0$ も合わせると、点 A は

$$\text{円の一部分} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ (y > 0), \text{ または } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ (y > 0)$$

の図形上にあることがわかる。逆に、点 A が円の一部分 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ (y > 0)$ 上にある

とき、円周角の定理より $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ を満たし、点 A が円の一部分 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ (y > 0)$

上にあるとき、円周角の定理より $\angle BAC = \frac{3}{4}\pi$ となることから、求める必要十分条件は

$$\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \ (a_2 > 0) \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 - a_1 - a_2 = 0$$

であることがわかる。

(答) $a_1^2 + a_2^2 - a_1 - a_2 = 0$

(4)

(2) と同様に考えることで、 M は (3) の結果を用いて

$$\begin{aligned} M &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot a_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{(a_1^2 + a_2^2) + ((a_1 - 1)^2 + a_2^2)\} + \frac{1}{2} a_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (2a_2 + 1) + \frac{1}{2} a_2 \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} a_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、(3) の式を満たすとき

$$a_1^2 + a_2^2 - a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

と変形できるから、 a_2 のとりうる値の範囲は $0 < a_2 \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ となる。したがって、 M のとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < M \leq \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$$

と求まる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{4} < M \leq \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$