

【解答】

(1)		ア	イ	ウ	エ					
		2	3	2	3					
(2)		オ	カ	キ	ク	ケ				
		8	1	5	2	3				
(3)	(a)	コ	サ	シ	ス					
		2	0	2	1					
	(b)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
		2	2	2	3	2	2	4	8	3

【解説】

- (1)
- はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 2)$ のとき、玉の取り出し方は ${}_4C_2 = 6$ 通り
- である。このうち1回でも同時に取り出した2個の玉に書かれた番号が一致するのは、1回目に取り出す玉の番号の組み合わせが $(1, 1), (2, 2)$ のときである。よって
- $$p_2 = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$$
- である。また、はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 3)$ のとき、玉の取り出し方は同様に6通りである。このうち1回でも同時に取り出した2個の玉に書かれた番号が一致するのは、1回目に取り出す玉の番号の組み合わせが $(1, 1), (2, 3)$ のときである。よって
- $$q_2 = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$$
- である。
- (2)
- はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 2, 3, 3)$ のとき、1回目の玉の取り出し方は ${}_6C_2 = 15$ 通り
- である。このうち1回目に取り出す玉の番号が一致する取り出し方は、 $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ の3通り
- である。一方で1回目に番号が一致しない2個の玉を取り出した場合、袋には4個の玉が残る。これらのうち番号が同じものは2個で、他の2個の玉の番号はそれ以外のすべてと異なる。これは(1)の後半の状況であるから
- $$p_3 = \frac{12}{15} \cdot q_2 = \frac{8}{15}$$
- である。また、はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 2, 3, 4)$ のとき、1回目の玉の取り出し方は同様に15通りである。以下、1回目に取り出す玉の番号の組み合わせで場合分けをする。
- [1] $(3, 4)$ を取り出すとき
- 袋に残る玉の番号は $(1, 1, 2, 2)$ となり、これは(1)の前半の状況であるから、以降同時に取り出した2個の玉の番号が一度も一致しない確率は
- $$p_2$$
- である。
- [2] $(1, 2)$ を取り出すとき
- $(1, 2)$ の取り出し方は ${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 4$ 通り
- である。袋に残る玉の番号は $(1, 2, 3, 4)$ となり、以降同時に取り出した玉の番号が一致することはない。
- [3] $(1$ または $2, 3$ または $4)$ を取り出すとき
- 取り出し方は ${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 8$ 通り
- である。袋に残る玉は4つで、このうち番号が同じものは2個で、他の2つの玉の番号はそれ以外のすべてと異なる。これは(1)の後半の状況であるから、以降同時に取り出した2個の玉の番号が一度も一致しない確率は
- $$q_2$$
- である。
- 以上[1], [2], [3]より
- $$\begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{15} \cdot p_2 + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} \cdot q_2 \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$
- である。
- (3)(a)
- はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 2, \dots, n, n, n+1, n+1)$ のとき、1回目の玉の取り出し方は
- $${}_{2n+2}C_2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2} = (n+1)(2n+1) \text{ 通り}$$
- である。このうち、1回目に取り出す玉の番号が一致しないのは
- $${}_{n+1}C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 2n(n+1) \text{ 通り}$$
- である。1回目に番号が異なる2個の玉を取り出したあと、袋には $2n$ 個の玉があり、このうち番号が同じものは $n-1$ 組あり、その他の2個の玉の番号は、それ以外のすべてと異なる。これは、玉に書かれている番号が、1から $n-1$ までの玉が2個ずつ、 $n, n+1$ が書かれた玉が1個ずつある状況と同じであるから、以降同時に取り出した2個の玉の番号が一度も一致しない確率は
- $$q_n$$
- である。よって
- $$p_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{(n+1)(2n+1)} q_n = \frac{2n}{2n+1} q_n$$
- となるから、関数 $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$ を定義すれば
- $$p_{n+1} = f(n) q_n$$
- が成り立つ
- (b)
- はじめに袋に入っている玉に書かれている番号が $(1, 1, 2, 2, \dots, n, n, n+1, n+2)$ である状況を考える。 $n+1$ 回の操作のうち、 $n+2$ の番号の玉が取り出された操作に注目して場合分けをする。
- [1] $n+2$ の番号の玉と同時に取り出した玉の番号が $n+1$ のとき
- このとき、他の n 回の操作で取り出す $2n$ 個の玉のうち、番号が同じものは n 組ある。よって他の n 回の操作全てにおいて、同時に取り出した2個の玉の番号が異なる確率は
- $$p_n$$
- と等しい。
- [2] $n+2$ の番号の玉と同時に取り出した玉の番号が $n+1$ 以外のとき
- このとき、他の n 回の操作で取り出す $2n$ 個の玉のうち、番号が同じものは $n-1$ 組あり、その他の2個の玉の番号は、それ以外のすべてと異なる。よって他の n 回の操作全てにおいて、同時に取り出した2個の玉の番号が異なる確率は
- $$q_n$$
- と等しい。
- $n+2$ の番号の玉と同時に取り出した玉の番号が $n+1$ となる確率は $\frac{1}{2n+1}$ であるから、[1], [2]より、
- $$q_{n+1} = \frac{1}{2n+1} p_n + \frac{2n}{2n+1} q_n$$
- が成り立つ。ここで、(3)(a)の結果より、
- $$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2n}{2n+1} q_n \\ \Leftrightarrow q_n &= \frac{2n+1}{2n} p_{n+1} \end{aligned}$$
- が成り立つから、
- $$\begin{aligned} \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)} p_{n+2} &= \frac{1}{2n+1} p_n + \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n} p_{n+1} \\ \Leftrightarrow p_{n+2} &= \frac{2n+2}{2n+3} p_{n+1} + \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)} p_n \\ \therefore p_{n+2} &= \frac{2n+2}{2n+3} p_{n+1} + \frac{2n+2}{4n^2+8n+3} p_n \end{aligned}$$
- となる。以上より、
- $$g(x) = \frac{2x+2}{2x+3}, h(x) = \frac{2x+2}{4x^2+8x+3}$$
- とおくと、
- $$p_{n+2} = g(n) p_{n+1} + h(n) p_n$$
- が成り立つ。

2

(1)

関数 $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ は $-1 \leq x \leq 1$ で定義されるが、 $-1 < x < 1$ において導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \\ &= \left\{ \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \right\} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \\ &= \frac{1-2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

(2)

関数 $f(x)$ について、 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ の値は

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)\sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} - 0}{h} \\ &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} + \sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-h}} \sqrt{\frac{2+h}{1+(1+h)^2}} + \sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} \end{aligned}$$

であり、ここで

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{\sqrt{-h}} = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2+h}{1+(1+h)^2}} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} = 0$$

となるから、求める極限値は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{-h}} \sqrt{\frac{2+h}{1+(1+h)^2}} + \sqrt{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}} \right\} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\infty$$

(3)

関数 $f(x)$ について、 $f(x)+f(-x)$ の値は

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + (-x)\sqrt{\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}} \\ &= x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} - x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x)+f(-x)=0$$

(4)

(1)の結果より、 $f'(x)=0$ となる x の値は

$$\begin{aligned} \frac{1-2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4+2x^2-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -1+\sqrt{2} \quad (>0) \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であることがわかる。また、そのときの $\{f(x)\}^2$ の値は

$$\begin{aligned} \left\{ f\left(\pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right) \right\}^2 &= \left\{ \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-(-1+\sqrt{2})}{1+(-1+\sqrt{2})}} \right\}^2 \\ &= \left\{ \pm\left(\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^2 \\ &= 3-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}, \left\{ f\left(\pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right) \right\}^2 = 3-2\sqrt{2}$$

(5)

$\alpha = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$ とおく。このとき、(1)の結果より導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \\ &= -\frac{x^4+2x^2-1}{(x^2+1)} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \\ &= -\frac{(x^2+\alpha^2)(x+\alpha)(x-\alpha)}{(x^2+1)} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \end{aligned}$$

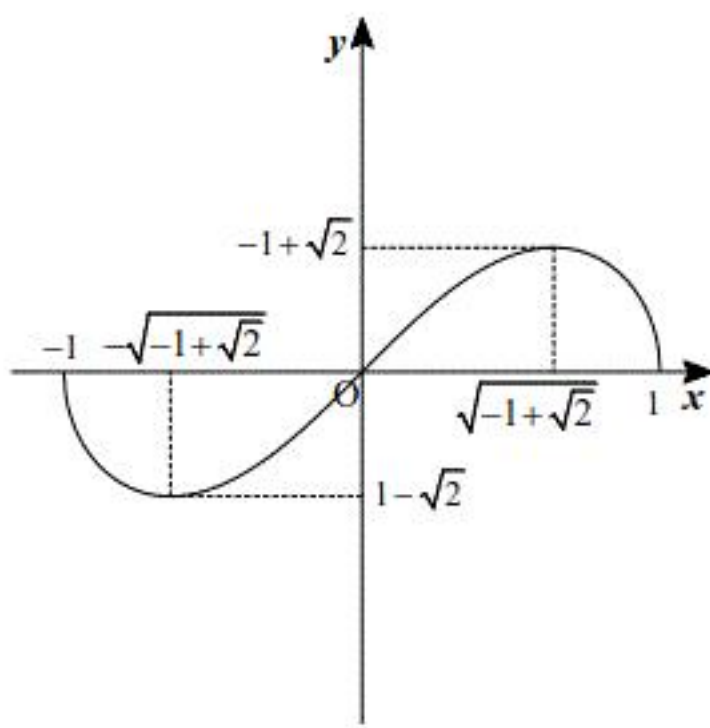
と表せる。また、(3)の結果より

$$f(x) = -f(-x)$$

であるから、関数 $y=f(x)$ のグラフは原点对称であることがわかる。さらに、(2)の結果も考慮すると、 $0 \leq x \leq 1$ における関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	⋯	α	⋯	1
$f'(x)$	1	+	0	-	$(-\infty)$
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

したがって、曲線 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

(6)

$x=-t$ とおくと、 x と t の対応関係は

$$\begin{array}{c|cc} \frac{dx}{dt} & -1 & \\ \hline x & -1 & \rightarrow 1 \\ t & 1 & \rightarrow -1 \end{array}$$

となるから、定積分 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ の値は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_1^{-1} f(-t) \cdot (-1)dt \\ &= \int_1^{-1} f(t)dt \quad (\because -f(-t)=f(t)) \\ &= -\int_{-1}^1 f(t)dt \\ \therefore \int_{-1}^1 f(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$