

【解答】

(1)	<table><tr><td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td><td>オ</td><td>カ</td><td>キ</td><td>ク</td><td>ケ</td><td>コ</td><td>サ</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr></table>	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	2	1	0	2	1	0	2	0	1	0	2
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ													
2	1	0	2	1	0	2	0	1	0	2													
(2)	<table><tr><td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td colspan="8"></td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td colspan="8"></td></tr></table>	ア	イ	ウ									3	4	2								
ア	イ	ウ																					
3	4	2																					
(3)	<table><tr><td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td><td>オ</td><td>カ</td><td>キ</td><td colspan="4"></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td colspan="4"></td></tr></table>	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ					1	1	5	2	1	5	2				
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ																	
1	1	5	2	1	5	2																	

【解説】

【解説】
(1)(a)与えられた条件 $BC > AB$ より

$$A > C$$

が成り立つ。 $\sin A - \sin B$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\sin A - \sin B &= \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{20} - \sqrt{10}}{10} > 0\end{aligned}$$

となるため、 $\sin A > \sin B$ である。 $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ と仮定すると、

$$\begin{aligned}\pi - B &< A \quad (\because \sin A > \sin B) \\ \Leftrightarrow A + B &> \pi\end{aligned}$$

となり、三角形が成立する条件を満たさないため、 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ である。また、 $\sin \frac{\pi}{3} - \sin A$ を計

算すると、

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{3} - \sin A &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{75} - \sqrt{20}}{10} > 0\end{aligned}$$

となり、 $\sin \frac{\pi}{3} > \sin A$ が成り立つ。 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ と仮定すると、 $\sin \frac{\pi}{3} > \sin A$ より $\frac{\pi}{3} > A$ であり、 $\sin A > \sin B$ かつ $0 < B < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{3} > B$ である。したがって、

$$\begin{aligned}C &= \pi - (A + B) \\ &> \pi - \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となり、 $A > C$ を満たさないため不適である。これより $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ が成り立つ。以上より、

$$\begin{aligned}\cos A &= -\sqrt{1 - \sin^2 A} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos B &= \sqrt{1 - \sin^2 B} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

であるから、三角関数の加法定理を用いて、

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin \{\pi - (A + B)\} \\ &= \sin (A + B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

と求まる。

(b) 三角形 ABC の外接円の半径を R とすると、三角形 ABC について正弦定理より、

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$$

となり、

$$\begin{aligned}AB &= 2R \sin C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5} R \\ BC &= 2R \sin A \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} R \\ CA &= 2R \sin B \\ &= \frac{\sqrt{10}}{5} R\end{aligned}$$

が成り立つ。三角形 ABC の面積は 20 であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin A &= 20 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{25} R^2 &= 20 \\ \therefore R &= 10\sqrt{5} \quad (\because R > 0)\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}AB &= \frac{\sqrt{2}}{5} R \\ &= 2\sqrt{10} \\ BC &= \frac{2\sqrt{5}}{5} R \\ &= 20 \\ CA &= \frac{\sqrt{10}}{5} R \\ &= 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)(a)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned}mn &= 4m - 3n + 24 \\ \Leftrightarrow (m+3)n - 4m &= 24 \\ \Leftrightarrow (m+3)n - 4(m+3) &= 12 \\ \Leftrightarrow (m+3)(n-4) &= 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 m, n は自然数であるから、 $m+3, n-4$ は整数であり

$$m+3 \geq 4, n-4 \geq -3$$

が成り立つ。このとき、①を満たす $m+3, n-4$ の組は、

$$(m+3, n-4) = (4, 3), (6, 2), (12, 1)$$

となるため、

$$(m, n) = (1, 7), (3, 6), (9, 5)$$

と求まり、与えられた等式を満たす自然数 m, n の組は 3 組である。

(b)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned}m^2 n - 2mn + 3n - 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m^2 - 2m + 3)n &= 36 \\ \Leftrightarrow \{(m-1)^2 + 2\}n &= 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 m, n は自然数であるから $(m-1)^2 + 2, n$ は整数であり、

$$(m-1)^2 + 2 \geq 2, n \geq 1$$

が成り立つ。②を満たす $(m-1)^2 + 2, n$ の組は、

$$((m-1)^2 + 2, n) = (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2)$$

となるため、

$$((m-1)^2, n) = (0, 18), (1, 12), (2, 9), (4, 6), (7, 4), (10, 3), (16, 2)$$

となる。このうち $m-1$ が整数となる組は

$$((m-1)^2, n) = (0, 18), (1, 12), (4, 6), (16, 2)$$

であり、

$$\begin{aligned}(m-1, n) &= (0, 18), (1, 12), (2, 6), (4, 2) \quad (\because m \text{ は自然数であるから } m-1 \geq 0) \\ \Leftrightarrow (m, n) &= (1, 18), (2, 12), (3, 6), (5, 2)\end{aligned}$$

となり、与えられた等式を満たす m, n の組は 4 組である。

(c)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned}m^3 - m^2 n + (2n+3)m - 3n + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m^2 - 2m + 3)n &= m^3 + 3m + 6 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{m^3 + 3m + 6}{m^2 - 2m + 3} \\ &= m + 2 + \frac{4m}{m^2 - 2m + 3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。 m, n は自然数であるから、 $\frac{4m}{m^2 - 2m + 3}$ が整数である必要がある。ここで、

$$m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0$$

であり $m > 0$ であることから、

$$\begin{aligned}4m &\geq m^2 - 2m + 3 \\ \Leftrightarrow m^2 - 6m + 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 - \sqrt{6} &\leq m \leq 3 + \sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる必要がある。 $2 < \sqrt{6} < 3$ より、④を満たす m は

$$m = 1, 2, 3, 4, 5$$

である。この m の値について場合分けする。[1] $m=1$ のとき

$$m=1 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると、}$$

$$\begin{aligned}n &= 1 + 2 + \frac{4}{1-2+3} \\ &= 5\end{aligned}$$

となり題意を満たす。

[2] $m=2$ のとき

$$m=2 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると、}$$

$$\begin{aligned}n &= 2 + 2 + \frac{8}{4-4+3} \\ &= 4 + \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となり、 n が自然数とならないため不適である。[3] $m=3$ のとき

$$m=3 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると、}$$

$$\begin{aligned}n &= 3 + 2 + \frac{12}{9-6+3} \\ &= 7\end{aligned}$$

となり題意を満たす。

[4] $m=4$ のとき

$$m=4 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると、}$$

$$\begin{aligned}n &= 4 + 2 + \frac{16}{16-8+3} \\ &= 6 + \frac{16}{11}\end{aligned}$$

となり、 n が自然数とならないため不適である。[5] $m=5$ のとき

$$m=5 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると、}$$

$$\begin{aligned}n &= 5 + 2 + \frac{20}{25-10+3} \\ &= 7 + \frac{10}{9}\end{aligned}$$

となり、 n が自然数とならないため不適である。以上、[1]～[5]より、与えられた等式を満たす m, n の組は

$$(m, n) = (1, 5), (3, 7)$$

の 2 組である。

(3)(a)

与えられた定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

(b)

 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2 \left(x + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= 2 \left(x + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right)\end{aligned}$$

となる。方程式 $f'(x) = 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} &= 2x^2 - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}\end{aligned}$$

となる。両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}x^2 - x^4 &= 1 - 4x^2 + 4x^4 \\ \Leftrightarrow 5x^4 - 5x^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ のとき、

$$\begin{aligned}2x^2 - 1 &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} > 0\end{aligned}$$

となるため⑤の両辺は正である。したがって $x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ のとき⑤を満たす x は

$$x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

である。 $x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ のとき、

$$\begin{aligned}2x^2 - 1 &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 1 \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0\end{aligned}$$

となるため⑤の左辺は負である。したがって $x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ のとき⑤を満たす x は

$$x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

である。これより、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	...	$-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$	...	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	...	1
f'		-	0	+	0	-	
f	$f(-1)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f(1)$

ここで、 $f(-1), f\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right), f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right), f(1)$ を計算すると

$$\begin{aligned}f(-1) &= (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{1-(-1)^2} = 1 \\ f\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{5}\sqrt{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ f(1) &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1-1^2} = 1\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(-1) = f(1)$ であるから、 $f(x)$ の値域は

$$\begin{aligned}f\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) &\leq f(x) \leq f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} &\leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(1)

 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

となるため、

$$f'(0) = 12$$

$$\Leftrightarrow c = 12$$

が成り立つ。接線の y 切片は -4 であるから、

$$f(0) = -4$$

$$\Leftrightarrow d = -4$$

となる。 $f(x)$ は $x=2$ で極値 0 をとるため、

$$f'(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a + 4b + 12 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8a + 4b + 24 - 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$a = 2, b = -9$$

と求まる。以上より、

$$a = 2, b = -9, c = 12, d = -4$$

である。

(答) $a = 2, b = -9, c = 12, d = -4$

(2)(a)

 $k=1$ のとき、点 A を通り傾き k の直線の方程式は

$$y = (x-1) + 1$$

$$= x$$

である。直線 $y=x$ に関する点 B の対称点は x, y 座標を入れ替えれば求まるため、

$$P(0, 1)$$

と求まる。

(答) $(0, 1)$

(b)

点 P の座標を (X, Y) とおき、 k が実数全体を動くときの点 P の軌跡を W とおく。点 A を通り、傾き k の直線を l とするとき、点 P が直線 l に関する点 B の対称点となるための条件は

$$\bullet \text{ 2点 } B, P \text{ の中点は直線 } l \text{ 上にある} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\bullet \overrightarrow{BP} \text{ と直線 } l \text{ の方向ベクトル } \vec{d} \text{ の内積は } 0 \text{ である} \quad \dots \textcircled{4}$$

の両方を満たすことである。ここで、直線 l の方程式は $y = k(x-1) + 1$ であり、線分 BP の中点は $\left(\frac{1+X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$ であるから、 $\textcircled{3}$ は

$$\frac{Y}{2} = k\left(\frac{1+X}{2} - 1\right) + 1 \Leftrightarrow kX - Y = k - 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

と表せる。また、 $\overrightarrow{BP} = (X-1, Y)$ であり、 $\vec{d} = (1, k)$ であるから、 $\textcircled{4}$ は

$$(X-1, Y) \cdot (1, k) = 0 \Leftrightarrow X + kY = 1 \quad \dots \textcircled{6}$$

と表せる。したがって、点 P が軌跡 W 上にあるための条件は

$$P \in W \Leftrightarrow \begin{cases} kX - Y = k - 2 \\ X + kY = 1 \end{cases} \text{ を満たす実数 } k \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kX - Y = k - 2 \\ k = \frac{1-X}{Y} \end{cases} \text{ を満たす実数 } k \text{ が存在する}$$

$$(\because Y=0 \text{ のとき、}\textcircled{5} \text{ かつ } \textcircled{6} \text{ を満たす実数 } k \text{ は存在しないため、} Y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-X}{Y} \cdot X - Y = \frac{1-X}{Y} - 2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2X - 2Y + 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad Y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (X-1)^2 + (Y-1)^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad Y \neq 0$$

となるから、求める軌跡は、中心が $(1, 1)$ 、半径が 1 の円のうち点 $(1, 0)$ を除いた部分である。(答) 中心が $(1, 1)$ 、半径が 1 の円のうち点 $(1, 0)$ を除いた部分

(c)

(b)より、

$$\begin{cases} s = 1 + \sin \theta \\ t = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

と表される。ただし、 $0 < \theta < 2\pi$ である。このとき PC^2 を計算すると、

$$\begin{aligned} PC^2 &= (s-4)^2 + (t-4)^2 \\ &= (\sin \theta - 3)^2 + (\cos \theta + 3)^2 \\ &= \sin^2 \theta - 6\sin \theta + 9 + \cos^2 \theta + 6\cos \theta + 9 \\ &= 19 - 6(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= 19 - 6\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ が最大となるとき PC が最小となる。 $-\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$ であるから、 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ が最大となるのは

$$\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi$$

のときである。このとき、

$$s = 1 + \sin \frac{3}{4}\pi = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = 1 - \cos \frac{3}{4}\pi = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるため、 $\textcircled{3}$ より、

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2}$$

と求まる。

(答) $k = 1 - \sqrt{2}$

3

(1)

与えられた条件より

$$OA = \sqrt{1+t^2}$$

である。OC = c とすると、

$$\begin{aligned} c\sqrt{1+t^2} &= 2(1+t^2) \\ \Leftrightarrow c &= 2\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

となる。また、直線 OA の傾きは t であり OA と OC は垂直であるから、直線 OC の傾きは $-\frac{1}{t}$

である。C の x 座標を p とすると、C の座標は $\left(p, -\frac{p}{t}\right)$ と表される。したがって、

$$\sqrt{p^2 + \frac{p^2}{t^2}} = 2\sqrt{1+t^2}$$

となり、両辺を二乗すると、

$$\begin{aligned} p^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) &= 4(1+t^2) \\ \Leftrightarrow p^2 &= 4t^2 \\ \therefore p &= \pm 2t \end{aligned}$$

が成り立つ。 $p = 2t$ のとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ &= (1, t) + (2t, -2) \\ &= (1+2t, t-2) \end{aligned}$$

となる。このとき、 $t > 0$ より点 B の x 座標は 1 より大きくなり与えられた条件を満たさないため不適である。 $x = -2t$ のとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ &= (1, t) + (-2t, 2) \\ &= (1-2t, t+2) \end{aligned}$$

となる。 $t > 0$ より点 B の x 座標は 1 より小さい。以上より、

$$B(1-2t, t+2), C(-2t, 2)$$

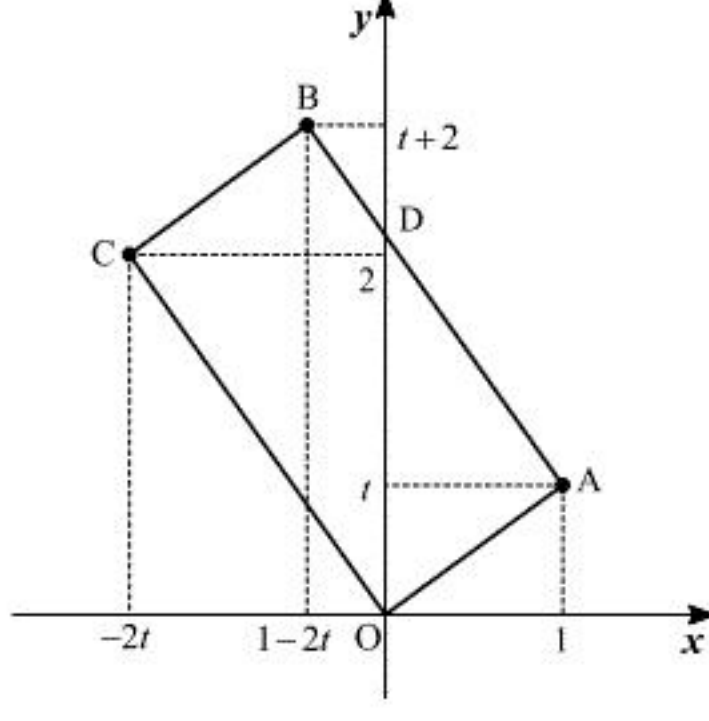
と求まる。

(答) $B(1-2t, t+2), C(-2t, 2)$

(2)

点 B の x 座標 $1-2t$ の値によって場合分けする。

[1] $1-2t < 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$ のとき



このとき、線分 AB は y 軸と交点を持つ。直線 AB の方程式は、

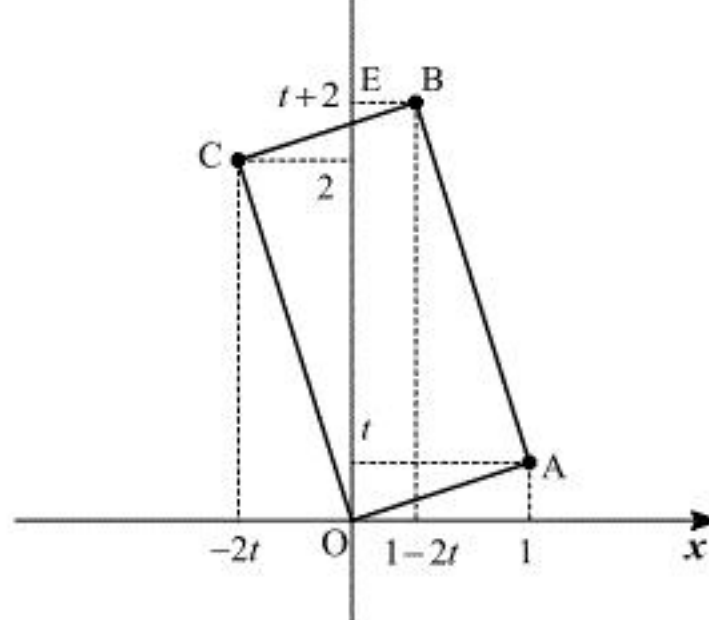
$$\begin{aligned} y &= \frac{t+2-t}{1-2t-1}(x-1)+t \\ &= -\frac{1}{t}x + t + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

であるからこの交点を D とすると、点 D の座標は $\left(0, t + \frac{1}{t}\right)$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot 1 \\ &= \frac{t^2 + 1}{2t} \end{aligned}$$

が成り立つ。

[2] $1-2t \geq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$ のとき



このとき、線分 BC は y 軸と交点を持つ。直線 BC の傾きは直線 OA の傾きと等しく t である。したがって直線 BC の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= t(x+2t)+2 \\ &= tx + 2t^2 + 2 \end{aligned}$$

であり、線分 BC と y 軸の交点を E とおくと点 E の座標は $(0, 2t^2 + 2)$ となる。 $\triangle OCE$ の

面積は

$$\frac{1}{2} \cdot (2t^2 + 2) \cdot 2t = 2t^3 + 2t$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= 2(1+t^2) - (2t^3 + 2t) \\ &= -2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上、[1], [2]より、

$$S = \begin{cases} \frac{t^2 + 1}{2t} & (t > \frac{1}{2}) \\ -2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。また、

$$S' = \begin{cases} \frac{t^2 - 1}{2t^2} & (t > \frac{1}{2}) \\ -6t^2 + 4t - 2 & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S' = \begin{cases} \frac{(t-1)(t+1)}{2t^2} & (t > \frac{1}{2}) \\ -2\{2t^2 + (t-1)^2\} & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

より、 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ において S が単調減少することに注意して増減表を書くと

t	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
S'		-		-	0	+
S					1	

となる。したがって、 $S(t)$ は $t=1$ のとき最小値

$$S(1)=1$$

をとる。

$$(\text{答}) S = \begin{cases} \frac{t^2 + 1}{2t} & (t > \frac{1}{2}) \\ -2t^3 + 2t^2 - 2t + 2 & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

最小値；1 ($t=1$ のとき)

(3)

OABC は長方形であるから、与えられた円の中心は線分 OB の中点である。この点を G とすると、

$$G\left(\frac{1-2t}{2}, \frac{t+2}{2}\right)$$

となり、円の半径は

$$\begin{aligned} GO &= \sqrt{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t+2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5(t^2+1)}}{2} \end{aligned}$$

となる。点 G と直線 $x+y=1$ の距離を d とすると、

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\frac{1-2t}{2} + \frac{t+2}{2} - 1\right|}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{|1-t|}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

と表される。ここで、一般に、円の中心から任意の弦に下した垂線は、その弦を二等分するから、 $d \neq 0$ のとき、点 G から直線 $x+y=1$ に下ろした垂足を H とすると、 $MH = NH$ が成り立つ。

つ。また、 $\triangle GMH$ における三平方の定理より

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{GM^2 - GH^2} \\ &= \sqrt{GO^2 - d^2} \\ &= \sqrt{\frac{5(t^2+1)}{4} - \frac{(1-t)^2}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{9t^2 + 2t + 9}{8}} \end{aligned}$$

となるから、求める線分の長さは

$$\begin{aligned} MN &= 2MH \\ &= 2\sqrt{\frac{9t^2 + 2t + 9}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{18t^2 + 4t + 18}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{18t^2 + 4t + 18}}{2}$$