

(1)(a)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{64}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{64}$$

(1)(b)

 $\sqrt{x}=t$ と置換すると, $x=t^2$ から

$$dx = 2t dt$$

となる。また,

x	1	$\rightarrow$	4
t	1	$\rightarrow$	2

となるから

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{\log t^2}{t} \cdot 2t dt \\
 &= 4 \int_1^2 \log t dt \\
 &= 4 \left[t \log t - t \right]_1^2 \\
 &= 8 \log 2 - 4
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 8 \log 2 - 4$$

(2)(a)

 C 上の点 (a, b) における接線の方程式は

$$ax + by = 2$$

となり, これが点 $(2, 1)$ を通るとき

$$2a + b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また, (a, b) は円上の点であるから

$$a^2 + b^2 = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。①, ②より b を消去すると

$$\begin{aligned}
 a^2 + (2 - 2a)^2 &= 2 \\
 \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 2 &= 0 \\
 \therefore a &= \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}
 \end{aligned}$$

となる。再び①式より

$$(a, b) = \left(\frac{4 + \sqrt{6}}{5}, \frac{2 - 2\sqrt{6}}{5} \right), \left(\frac{4 - \sqrt{6}}{5}, \frac{2 + 2\sqrt{6}}{5} \right)$$

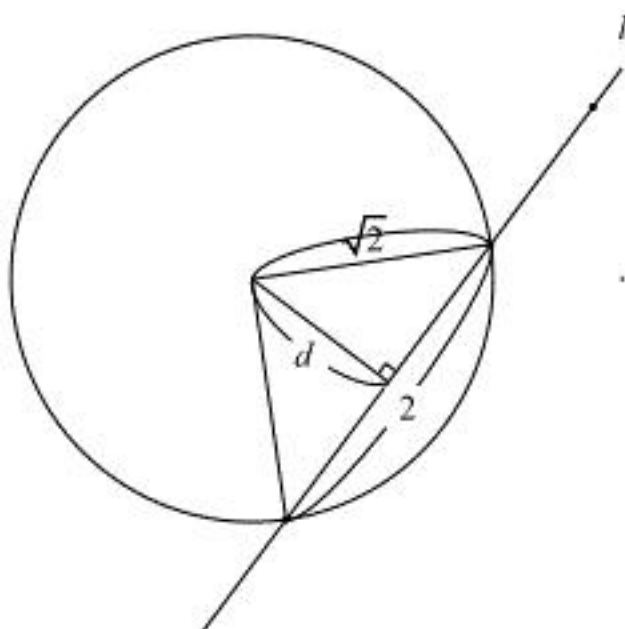
を得るから, 求める直線の方程式は

$$\frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}x + \frac{2 \mp 2\sqrt{6}}{5}y = 2 \text{ (複号同順)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}x + \frac{2 \mp 2\sqrt{6}}{5}y = 2 \text{ (複号同順)}$$

(2)(b)

直線を $l: mx + ny = 1$ とする。また, 下図のように d を定める。

三平方の定理より

$$d = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$$

となる。また, 点と直線の距離の公式から

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|1|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\
 \Leftrightarrow m^2 + n^2 &= 1 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

となり, l は点 $(2, 1)$ を通るから

$$2m + n = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③, ④を解くと

$$(m, n) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right), (0, 1)$$

となるから, 求める直線の方程式は

$$\begin{aligned}
 y &= 1 \\
 \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y &= 1 \Leftrightarrow 4x - 3y = 5
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 1, 4x - 3y = 5$$

3

(1)

P は線分 AB を $k:1-k$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= (1-k)(0, 2) + k(-\sqrt{3}, 1) = (-\sqrt{3}k, 2-k) \\ \therefore P &(-\sqrt{3}k, 2-k)\end{aligned}$$

となる。同様にして Q の座標は

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= (1-l)(0, 2) + l(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}l, 2-l) \\ \therefore Q &(\sqrt{3}l, 2-l)\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l-k), 2 - \frac{k+l}{2}\right) \\ \therefore M &\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l-k), 2 - \frac{k+l}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(-\sqrt{3}k, 2-k), Q(\sqrt{3}l, 2-l), M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l-k), 2 - \frac{k+l}{2}\right)$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}PQ &= 2 \\ \Leftrightarrow \left\{\sqrt{3}(l+k)\right\}^2 + \{(2-l)-(2-k)\}^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 3(l+k)^2 + (l-k)^2 &= 4 \quad \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow l^2 + kl + k^2 - 1 &= 0 \\ \therefore l &= \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4(k^2 - 1)}}{2} (\because l > 0) \\ &= \frac{-k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2}\end{aligned}$$

となる。これは k の値によらず、 $0 < l < 1$ を満たしている。

$$(\text{答}) \quad l = \frac{-k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2}$$

(3)

(1)および(2)より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}(l-k) \\ y = 2 - \frac{k+l}{2} \end{cases} &\quad \cdots \textcircled{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} l-k = \frac{2}{\sqrt{3}}x \\ k+l = 4-2y \end{cases}\end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3(4-2y)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + 3(y-2)^2 &= 1\end{aligned}$$

となる。ここで、(2)の結果および②より

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2} - k \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-3k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 x は $0 < k < 1$ において単調減少であるから、

$$\begin{aligned}1 &> \frac{-3k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2} > \frac{-3 + 1}{2} \\ \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} &< x < \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

を満たす。また、求める軌跡は $y=2$ に関して対称な楕円であるが、(2)の結果および②より、

$$y = 2 - \frac{k + \sqrt{4 - 3k^2}}{4}$$

であり、 $0 < k < 1$ において

$$y < 2$$

を満たす。よって求める軌跡は、

$$\frac{x^2}{3} + 3(y-2)^2 = 1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, y < 2 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{x^2}{3} + 3(y-2)^2 = 1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, y < 2 \right)$$

(4)

三角形 PQR が正三角形となるとき、一辺の長さが2であることから、

$$RM = \sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。ここで、 $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}l + \sqrt{3}k \\ -l + k \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルはある実数 u を用いて

$$u \begin{pmatrix} -l + k \\ -\sqrt{3}l - \sqrt{3}k \end{pmatrix}$$

と表せることから、問題文の条件、および $0 < k < 1, 0 < l < 1$ より、 $u > 0$ として

$$\overline{MR} = u \begin{pmatrix} -l + k \\ -\sqrt{3}l - \sqrt{3}k \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで、①、③より、

$$\begin{aligned}3 &= u^2 \left\{ (l-k)^2 + 3(l+k)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow u &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OR} &= \overline{OM} + \overline{MR} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l-k), 2 - \frac{k+l}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-l+k, -\sqrt{3}l - \sqrt{3}k) \\ &= (0, 2 - 2l - 2k)\end{aligned}$$

となる。R の y 座標を $Y(k) (0 < k < 1)$ とおくと、(2)より

$$\begin{aligned}Y(k) &= 2 - 2 \cdot \frac{-k + \sqrt{4 - 3k^2}}{2} - 2k \\ &= 2 - k - \sqrt{4 - 3k^2}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$Y'(k) = -1 + \frac{3k}{\sqrt{4 - 3k^2}}$$

となるから、

$$\begin{aligned}Y'(k) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3k &= \sqrt{4 - 3k^2} \\ \Leftrightarrow 9k^2 &= 4 - 3k^2 (\because k > 0) \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\because k > 0)\end{aligned}$$

となるので、 $Y(k)$ の増減は下表のようになる。

k	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$Y'(k)$		-	0	+	
$Y(k)$	(0)	$\searrow$	$2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	(0)

よって求める範囲は

$$2 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \leq y < 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \leq y < 0$$