

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ					
	3	4	1	3					
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	
	3	2	1	2	2	3	1	2	
(3)	(a)	ス	セ	ソ	タ				
		1	5	4	0				
	(b)	チ	ツ	テ					
		1	2	0					

【解説】

(1)

方程式 $f(x)=0$ は

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+ax+a-\frac{3}{4}\right)=0$$

と変形できるため、 $x=0$ を解に持つ。よって、 $f(x)=0$ が異なる実数解をちょうど2個もつ

のは、方程式 $x^2+ax+a-\frac{3}{4}=0$ が $x=0$ と $x=0$ でない解を持つ場合と、 $x=0$ でない重解を持つ場合の2通りに分けられる。

[1] 方程式 $x^2+ax+a-\frac{3}{4}=0$ が $x=0$ と $x=0$ でない解を持つ場合

このとき、方程式 $x^2+ax+a-\frac{3}{4}=0$ は $x=0$ を解に持つため、 a の値は

$$0^2+a\cdot 0+a-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$$

と求まる。このとき、この方程式の解は

$$x^2+\frac{3}{4}x=0 \Leftrightarrow x=0, -\frac{3}{4}$$

となるため、条件を満たす。

[2] 方程式 $x^2+ax+a-\frac{3}{4}=0$ が $x=0$ でない重解を持つ場合

このとき、この2次方程式の判別式を D_1 とおくと、 a の値は

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2-4\left(a-\frac{3}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-3) &= 0 \\ \therefore a &= 1, 3 \end{aligned}$$

と求まる。このとき、この方程式の解は

$$a=1 \text{ の場合} : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$a=3 \text{ の場合} : \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

となるため、条件を満たす。

以上[1], [2]より、方程式 $f(x)=0$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値は、小さい方から順に $\frac{3}{4}, 1, 3$ であることがわかる。

(2)

関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=3x^2+2ax+\left(a-\frac{3}{4}\right)$$

であるから、 $f(x)$ が極値をとるのは2次方程式 $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解を持つときである。ここで、この2次方程式の判別式を D_2 とおくと、この条件は

$$\begin{aligned} D_2 &> 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2-4\cdot 3\cdot \left(a-\frac{3}{4}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2a-3)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &\neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。また、このとき、極値を与える x の値は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2+2ax+a-\frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(3x+2a-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}a+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)(a)

$a=1$ のとき、 $f(x)=x^3+x^2+\frac{1}{4}x$ であり、(1)より $f(x)=0$ は $x=0$ と重解 $x=-\frac{1}{2}$ をもつ。また、

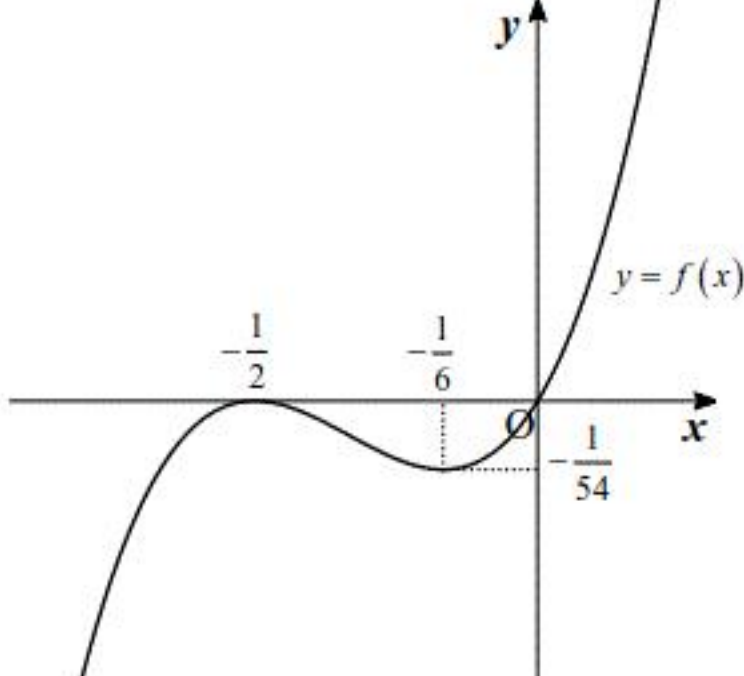
(2)より極値を与える x の値は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2} \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下になる。

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{1}{6}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{54}$	↗

以上より、 $y=f(x)$ のグラフは以下になる。



ここで、方程式 $f(x)=k$ が異なる3個の実数解を持つことは、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が3個共有点をもつことと同値であるから、上図より、実数 k の値の範囲は

$$-\frac{1}{54} < k < 0$$

であることがわかる。

(3)(b)

(3)(a)と同様に考える。 $a=3$ のとき、 $f(x)=x^3+3x^2+\frac{9}{4}x$ であり、(1)より $f(x)=0$ は $x=0$ と重

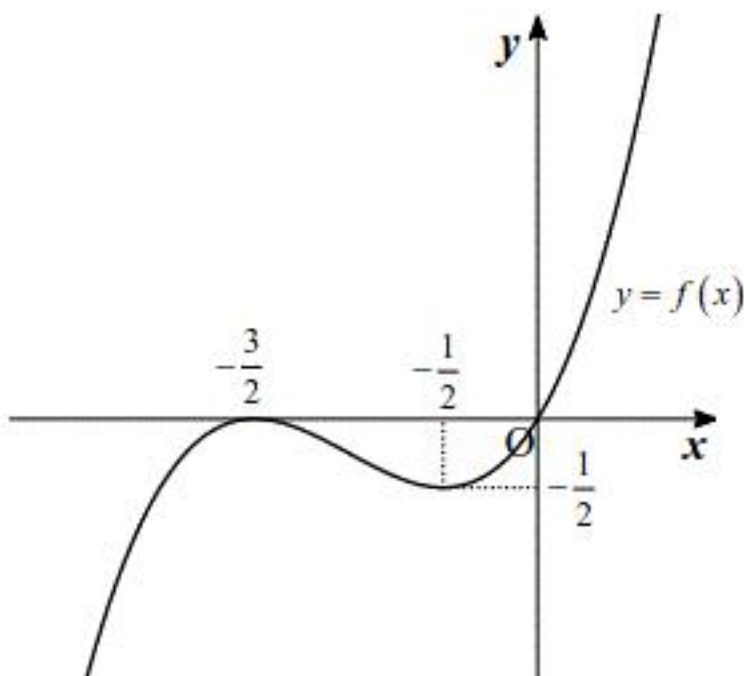
解 $x=-\frac{3}{2}$ をもつ。また、(2)より極値を与える x の値は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{2} \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下になる。

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

以上より、 $y=f(x)$ のグラフは以下になる。



ここで、方程式 $f(x)=k$ が異なる3個の実数解を持つことは、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が3個共有点をもつことと同値であるから、上図より、実数 k の値の範囲は

$$-\frac{1}{2} < k < 0$$

であることがわかる。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	6	4	6	2	5	6	1	1	2	5
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
	2	5	6	6	2	5				
(2)	チ	ツ	テ	ト						
	5	9	4	9						
(3)	ナ	ニ								
	2	1								

〔解説〕

(1)

ちょうど4回目に終了するのは、はじめの3回の試行で白玉を取り出し、最後の試行で赤玉を取り出す場合であるから、その確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$$

である。また、3回目までに終了するのは、3回目までに終了しない場合、つまりはじめの3回の試行で白玉を取り出す場合の余事象であるから、その確率は

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$$

である。さらに、4回目までに終了しない確率は、同様に考えることで

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

であることがわかる。

(2)

Aさんが、Aさんの*i*回目の試行で勝つ確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{16}{25}\right)^{i-1}$$

であるから、Aさんが、Aさんの*n*回以内の試行で勝つ確率 p_n は

$$p_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{5} \left(\frac{16}{25}\right)^{i-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{5}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\}$$

である。したがって、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ は $\left| \frac{16}{25} \right| < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\} = \frac{5}{9}$$

と求まる。また、Bさんが、Bさんの*j*回目の試行で勝つ確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{j-1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25} \left(\frac{16}{25}\right)^{j-1}$$

であるから、Bさんが、Bさんの*n*回以内の試行で勝つ確率 q_n は

$$q_n = \sum_{j=1}^n \frac{4}{25} \left(\frac{16}{25}\right)^{j-1} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{4}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\}$$

である。したがって、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ は $\left| \frac{16}{25} \right| < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\} = \frac{4}{9}$$

と求まる。

(3)

Aさんが100回を限度として試行を繰り返し、 k ($1 \leq k \leq 100$) 回目の試行で赤玉を取り出したときのB君が勝つ条件付き確率を r_k とおく。Aさんが*k* 回目の試行で赤玉を取り出したとき、B君が勝つのは $k-1$ ($2 \leq k \leq 100$) 回目までに赤玉を取り出す場合であるから

$$r_k = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

となり、これは $k=1$ のときも成立する。また、Aさんが100回の試行で赤玉を取り出さなかったときのB君が勝つ条件付き確率を r_{101} とおくと、これはB君が100回の試行で少なくとも1回赤玉を取り出す事象の確率と一致するから

$$r_{101} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{100}$$

となる。したがって、 $r_k \geq \frac{99}{100}$ となる k ($1 \leq k \leq 101$) の値を求めればよく、これを变形すると

$$\begin{aligned} r_k \geq \frac{99}{100} &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \leq \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow (k-1)(3\log_{10} 2 - 1) \leq -2 \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{2}{1-3\log_{10} 2} + 1 \end{aligned}$$

となり、ここで、 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-3 \cdot 0.3010} + 1 &\leq \frac{2}{1-3\log_{10} 2} + 1 \leq \frac{2}{1-3 \cdot 0.3011} + 1 \\ &\Leftrightarrow 21.61 \leq \frac{2}{1-3\log_{10} 2} + 1 \leq 21.68 \end{aligned}$$

となるため、求める k の値は

$$r_k \geq \frac{99}{100} \Leftrightarrow k \geq 22$$

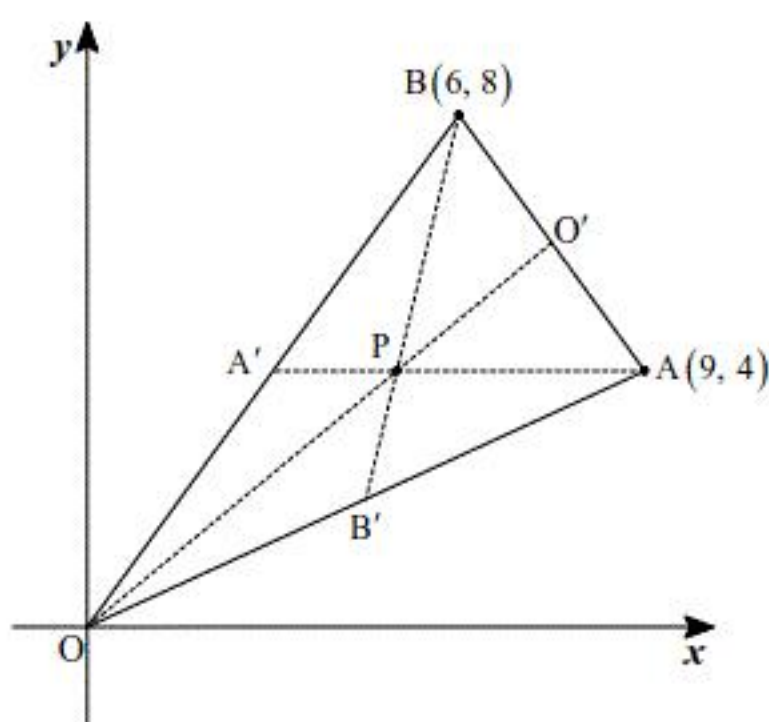
であることがわかる。したがって、Aさんが21回目までに赤玉を取り出せなかったとき、B君が勝つ条件付き確率が $\frac{99}{100}$ 以上になることがわかる。

【解答】

(1)	ア	イ								
	5	4								
(2)	(a)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
		3	4	3	4	1	5	1	2	
	(b)	サ	シ							
		1	6							

【解説】

(1)



上図のように点 O' , A' , B' を定める。このとき

$$\triangle POA : \triangle POB = 1:1 \Leftrightarrow AO':O'B = 1:1$$

$$\triangle POB : \triangle PAB = 1:1 \Leftrightarrow OB':B'A = 1:1$$

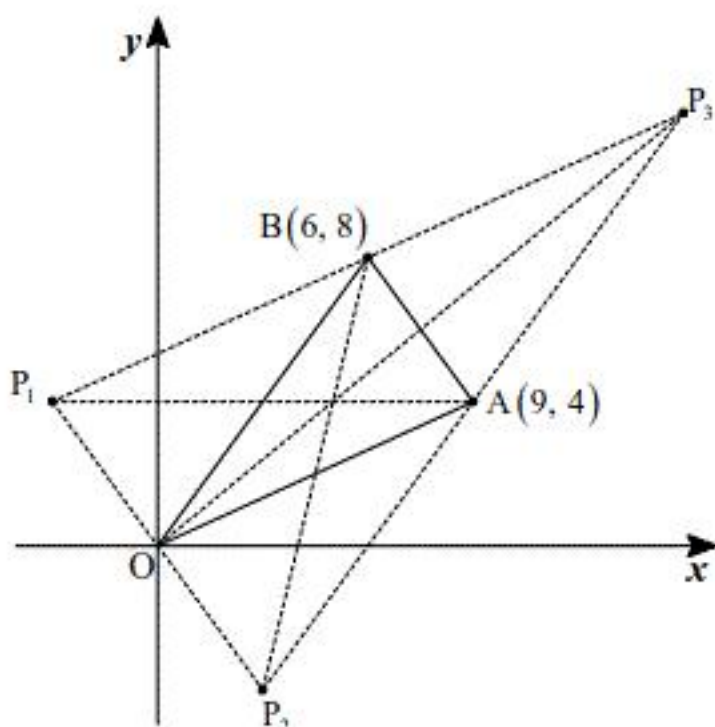
$$\triangle PAB : \triangle POA = 1:1 \Leftrightarrow BA':A'O = 1:1$$

であるから、点 P は $\triangle OAB$ の重心であることがわかる。したがって、点 P の座標は

$$\left(\frac{0+9+6}{3}, \frac{0+4+8}{3} \right) = (5, 4)$$

と求まる。

(2)(a)



上図のように、4点 $O, A, B, P_n (n=1, 2, 3)$ が平行四辺形を成すときに $\triangle P_nOA$, $\triangle P_nOB$, $\triangle P_nAB$ の面積はすべて等しくなる。このとき、点 P_1, P_2, P_3 の座標は

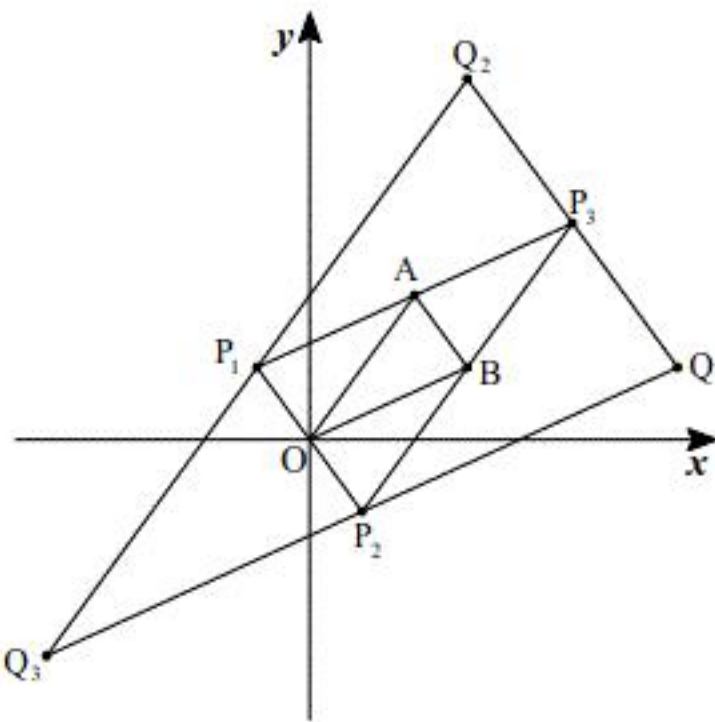
$$P_1 : (6, 8) - (9, 4) = (-3, 4)$$

$$P_2 : (9, 4) - (6, 8) = (3, -4)$$

$$P_3 : (9, 4) + (6, 8) = (15, 12)$$

と求まる。

(2)(b)



四角形 OBP_3A , $BA P_1O$, AOP_2B は平行四辺形であるから

$$AB:P_1P_2 = BO:P_3P_1 = OA:P_2P_3 = 1:2$$

である。したがって、 $\triangle OAB$ と $\triangle P_1P_2P_3$ は相似であり、その相似比は $1:2$ である。

また、四角形 $P_1P_2Q_1P_3$, $P_2P_3Q_2P_1$, $P_3P_1Q_3P_2$ は平行四辺形であるから

$$P_1P_2:Q_2Q_1 = P_2P_3:Q_3Q_2 = P_3P_1:Q_1Q_3 = 1:2$$

である。したがって、 $\triangle P_1P_2P_3$ と $\triangle Q_1Q_2Q_3$ は相似であり、その相似比は $1:2$ である。

よって、 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ の面積は $\triangle OAB$ の面積の

$$(2^2)^2 = 16 \text{ [倍]}$$

になる。

4

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ					
	7	2	1	7	2					
(2)	カ	キ	ク							
	1	3	4							
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
	1	2	1	3	2	3	1	6	1	2
(4)	テ	ト	ナ	ニ						
	6	2	6	4						

【解説】

(1)

双曲線 $x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$ 上の点 $T_1(a_1, b_1)$ における接線の方程式は

$$a_1x - \frac{4}{3}b_1y = 1$$

と表すことができる。この直線が点 $P_1(0, 1)$ を通ることから

$$0 - \frac{4}{3}b_1 = 1 \Leftrightarrow b_1 = -\frac{3}{4}$$

となり、さらに点 $T_1(a_1, b_1)$ は双曲線 $x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$ 上の点であるから

$$\begin{cases} a_1^2 - \frac{4}{3}b_1^2 = 1 \\ a_1 > 0 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、 a_1 の値は

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \\ \therefore a_1 &= \frac{\sqrt{7}}{2} (> 0) \end{aligned}$$

と求まるから、以上より、直線 P_1T_1 の方程式は

$$\frac{\sqrt{7}}{2}x - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x + 1$$

であることがわかる。

(2)

双曲線 $x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$ 上の点 $T_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ における接線の方程式は

$$a_{n+1}x - \frac{4}{3}b_{n+1}y = 1$$

と表すことができる。この直線が点 $P_n(0, a_n)$ を通ることから

$$0 - \frac{4}{3}a_nb_{n+1} = 1 \Leftrightarrow b_{n+1} = -\frac{3}{4a_n}$$

となり、さらに点 $T_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ は双曲線 $x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$ 上の点であるから

$$\begin{cases} a_{n+1}^2 - \frac{4}{3}b_{n+1}^2 = 1 \\ a_n > 0 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、 a_{n+1} は $a_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を用いて

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= 1 + \frac{4}{3}b_{n+1}^2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \sqrt{1 + \frac{4}{3}b_{n+1}^2} (> 0) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \sqrt{1 + \frac{3}{4a_n^2}} \left(\because b_{n+1} = -\frac{3}{4a_n} \right) \end{aligned}$$

と表せる。

(3)

関係式 $c_{n+1} = pc_n + q$ に $c_n = \frac{1}{a_n^2 + k}$, および $a_{n+1}^2 = \frac{3}{4a_n^2} + 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= pc_n + q \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2 + k} &= p \frac{1}{a_n^2 + k} + q \\ \Leftrightarrow a_n^2 + k &= p \left(\frac{3}{4a_n^2} + 1 + k \right) + q \left(a_n^2 + k \right) \left(\frac{3}{4a_n^2} + 1 + k \right) \\ \Leftrightarrow a_n^2 (a_n^2 + k) &= \{ qa_n^2 + (p + kq) \} \left\{ (k+1)a_n^2 + \frac{3}{4} \right\} \\ \Leftrightarrow \{ (k+1)q - 1 \} a_n^4 &+ \left\{ (k+1)(p + kq) + \frac{3}{4}q - k \right\} a_n^2 + \frac{3}{4}(p + kq) = 0 \end{aligned}$$

となる。この式が任意の実数 a_n に対して成立するのは

$$\begin{aligned} \begin{cases} (k+1)q - 1 = 0 \\ (k+1)(p + kq) + \frac{3}{4}q - k = 0 \\ \frac{3}{4}(p + kq) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}q^2 + q - 1 = 0 \\ k = \frac{3}{4}q \\ p + kq = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (k, p, q) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(-\frac{3}{2}, -3, -2 \right) \end{aligned}$$

を満たすときである。ここで、 $|p| < 1$ を満たすものは

$$(k, p, q) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

であり、このとき数列 $\{c_n\}$ の漸化式は

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= -\frac{1}{3}c_n + \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow c_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{3} \left(c_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} c_n &= \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(c_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{1}{a_0^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

$\left| -\frac{1}{3} \right| < 1$ であることから、(3)の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$ であることがわかる。ここで、 $c_n = \frac{1}{a_n^2 + k}$ で

あることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{c_n} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

となる。また、(2)における考察より、 $b_n = -\frac{3}{4a_{n-1}}$ であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4a_{n-1}} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

となる。したがって、 n が限りなく大きくなるとき、点 $T_n(a_n, b_n)$ は $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \right)$ に限りなく近

づくことがわかる。

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク				
		1	5	2	1	1	5	2	2				
	(b)	ケ	コ	サ	シ								
		1	2	1	2								
(2)	(a)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	
		1	2	1	2	3	1	0	1	2	1	5	
	(b)	ネ	ノ	ハ	ヒ								
		1	2	1	2								

【解説】

(1)(a)

部分積分法を用いることにより，定積分 $\int_0^t f_2(x)dx$ ， $\int_0^t g_2(x)dx$ は，それぞれ

$$\begin{aligned}\int_0^t f_2(x)dx &= \int_0^t e^{-x} \cos 2x dx \\ &= \left[-e^{-x} \cos 2x \right]_0^t - 2 \int_0^t e^{-x} \sin 2x dx \\ &= -2 \int_0^t g_2(x)dx - f_2(t) + 1 \\ \Leftrightarrow \int_0^t f_2(x)dx &= -2 \int_0^t g_2(x)dx - f_2(t) + 1 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t g_2(x)dx &= \int_0^t e^{-x} \sin 2x dx \\ &= \left[-e^{-x} \sin 2x \right]_0^t + 2 \int_0^t e^{-x} \cos 2x dx \\ &= 2 \int_0^t f_2(x)dx - g_2(t) \\ \Leftrightarrow \int_0^t g_2(x)dx &= 2 \int_0^t f_2(x)dx - g_2(t) \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と変形できる。よって，①，②を連立して解くことにより

$$\begin{cases} \int_0^t f_2(x)dx = \frac{1}{5}(-f_2(t) + 2g_2(t) + 1) \\ \int_0^t g_2(x)dx = \frac{1}{5}(-2f_2(t) - g_2(t) + 2) \end{cases}$$

となる。

(1)(b)

部分積分法を用いることにより，定積分 $\int_0^{2\pi} f_1(x)dx$ ， $\int_0^{2\pi} g_1(x)dx$ は，それぞれ

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f_1(x)dx &= \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= -\int_0^{2\pi} g_1(x)dx - e^{-2\pi} + 1 \\ \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f_1(x)dx &= -\int_0^{2\pi} g_1(x)dx - e^{-2\pi} + 1 \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g_1(x)dx &= \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f_1(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} g_1(x)dx &= \int_0^{2\pi} f_1(x)dx \quad \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

と変形できる。よって，③，④を連立して解くことにより

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} f_1(x)dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) \\ \int_0^{2\pi} g_1(x)dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) \end{cases}$$

となる。

(2)(a)

$0 \leq y \leq e^{-x}|a + \cos 2x|$ が表す領域を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V_f は

$$\begin{aligned}V_f &= \pi \int_0^{\pi} \left\{ e^{-x} |a + \cos 2x| \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} (a^2 + 2a \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \left(a^2 + \frac{1}{2} + 2a \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\ &= \pi \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi} e^{-2x} dx + 2a \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 4x dx \right\}\end{aligned}$$

と立式できる。ここで， $2x = t$ とおくと

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{dx}{dt} & = & \frac{1}{2} & \\ \hline x & 0 & \rightarrow & \pi \\ t & 0 & \rightarrow & 2\pi \end{array}$$

と対応するから， V_f は

$$\begin{aligned}V_f &= \pi \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} dt + 2a \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos t dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos 2t dt \right\} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} \right) \int_0^{2\pi} e^{-t} dt + a \int_0^{2\pi} f_1(t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f_2(t) dt \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで，(1)の結果より，各定積分の値について

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-t} dt &= \left[-e^{-t} \right]_0^{2\pi} = 1 - e^{-2\pi} \\ \int_0^{2\pi} f_1(t) dt &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) \\ \int_0^{2\pi} f_2(t) dt &= \frac{1}{5}(-f_2(2\pi) + 2g_2(2\pi) + 1) = \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi})\end{aligned}$$

となることから， V_f は a を用いて

$$\begin{aligned}V_f &= \pi \left\{ \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} \right) (1 - e^{-2\pi}) + a \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi}) \right\} \\ &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{3}{10} \right)\end{aligned}$$

と表せることがわかる。

$0 \leq y \leq e^{-x}|a + \sin 2x|$ が表す領域を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V_g は

$$\begin{aligned}V_g &= \pi \int_0^{\pi} \left\{ e^{-x} |a + \sin 2x| \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} (a^2 + 2a \sin 2x + \sin^2 2x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \left(a^2 + \frac{1}{2} + 2a \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\ &= \pi \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi} e^{-2x} dx + 2a \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin 2x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 4x dx \right\}\end{aligned}$$

と立式できる。ここで， $2x = t$ とおくと

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{dx}{dt} & = & \frac{1}{2} & \\ \hline x & 0 & \rightarrow & \pi \\ t & 0 & \rightarrow & 2\pi \end{array}$$

と対応するから， V_g は

$$\begin{aligned}V_g &= \pi \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} dt + 2a \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} \sin t dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos 2t dt \right\} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} \right) \int_0^{2\pi} e^{-t} dt + a \int_0^{2\pi} g_1(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f_2(t) dt \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで，(1)の結果より，各定積分の値について

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-t} dt &= 1 - e^{-2\pi} \\ \int_0^{2\pi} g_1(t) dt &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) \\ \int_0^{2\pi} f_2(t) dt &= \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi})\end{aligned}$$

となることから， V_g は a を用いて

$$\begin{aligned}V_g &= \pi \left\{ \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} \right) (1 - e^{-2\pi}) + a \cdot \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi}) \right\} \\ &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{5} \right)\end{aligned}$$

と表せることがわかる。

(2)(b)

(2)(a)の結果より， V_f, V_g はそれぞれ

$$\begin{aligned}V_f &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{3}{10} \right) \\ &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left\{ \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{40} \right\} \\ V_g &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{5} \right) \\ &= \pi (1 - e^{-2\pi}) \left\{ \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{40} \right\}\end{aligned}$$

と変形できるから， V_f, V_g を最小にする a の値を a_f, a_g とおくと

$$a_f = a_g = -\frac{1}{2}$$

となる。