

【解答】

(1)	ア					
	1					
(2)	イ	ウ	エ	オ		
	3	2	3	6		
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	4	2	3	3	3	4

【解説】

(1)

 $n=2$ のとき

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の整数解を考える。 $x_1=1$ のとき①を満たす x_2 は存在せず、②より $\frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$ であるから、

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{x_1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 2 \quad (\because \textcircled{1})$$

である。したがって、 $x_1=2$ のみ考えればよい。 $x_1=2$ のとき①を満たす x_2 は $x_2=2$ であり、これは②を満たすから、条件を満たす整数解の個数は1個であることがわかる。

(2)

 $n=3$ のとき

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

の整数解を考える。 $x_1=1$ のとき③を満たす x_2, x_3 は存在せず、④より $\frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$ であるから、

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{3}{x_1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 3 \quad (\because \textcircled{3})$$

である。したがって、 $x_1=2, 3$ のみ考えればよい。以下、それぞれの場合について考える。

[1] $x_1=2$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3'}$$

$$2 \leq x_2 \leq x_3 \quad \cdots \textcircled{4'}$$

の整数解を考える。 $x_2=2$ のとき③'を満たす x_3 は存在せず、④'より

$$x_3 \leq 4 \quad (\because \textcircled{3'})$$

であるから、 $x_2=3, 4$ のみ考えればよい。このとき、③'を満たす x_2, x_3 の組は

$$(x_2, x_3) = (3, 6), (4, 4)$$

であり、これらは④'を満たすから、整数解の個数は2個であることがわかる。

[2] $x_1=3$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{3''}$$

$$3 \leq x_2 \leq x_3 \quad \cdots \textcircled{4''}$$

の整数解を考える。④''より

$$x_2 \leq 3 \quad (\because \textcircled{3''})$$

であるから、 $x_2=3$ のみ考えればよい。このとき、③''を満たす x_2, x_3 の組は

$$(x_2, x_3) = (3, 3)$$

であり、これは④''を満たすから、整数解の個数は1個であることがわかる。

以上[1], [2]より、条件を満たす整数解の個数は3個であり、それらの解のうち $x_1+x_2+x_3$ の値が最も大きいものは

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 6) \quad (\because x_1+x_2+x_3=11)$$

であることがわかる。

(3)

 $n=4$ のとき

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{6}$$

の整数解のうち、 x_4 が最大となる場合を考える。 $x_1=1$ のとき⑤を満たす x_2, x_3, x_4 は存在せず、 $x_1=2$ とすると、⑤、⑥は

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{5'}$$

$$2 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{6'}$$

となる。そして、 $x_2=2$ のとき⑤'を満たす x_3, x_4 は存在せず、 $x_2=3$ とすると、⑤'、⑥'は

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{6} \quad \cdots \textcircled{5''}$$

$$3 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{6''}$$

となる。さらに、 $3 \leq x_3 \leq 6$ のとき⑤''を満たす x_3, x_4 は存在せず、 $x_3=7$ とすると、⑤''を満たす x_3, x_4 の組は

$$(x_3, x_4) = (7, 42)$$

となり、これは⑥''を満たす。したがって、条件を満たす整数解の1つとして

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 7, 42)$$

が見つかった。

以下、条件を満たす整数解のうち、 x_4 の最大値は42であることを示す。 $x_4 > 42$ と仮定したとき、背理法を用いて、以下の⑦、⑧を満たす整数解 (x_1, x_2, x_3) が存在しないことを示せばよい。

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{1}{x_4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\frac{3}{4} < 1 - \frac{1}{x_4} < 1$ に注意して、先と同様に x_1 の大きさを評価すると

$$2 \leq x_1 \leq 3$$

となる。以下、それぞれの場合について考える。

[1] $x_1=2$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_4} \quad \cdots \textcircled{7'}$$

$$2 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{8'}$$

の整数解を考える。 $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} - \frac{1}{x_4} < \frac{1}{2}$ に注意して、先と同様に x_2 の大きさを評価すると

$$3 \leq x_2 \leq 4$$

となる。 $x_2=3$ のとき、⑦'は

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x_4} \Leftrightarrow x_3 = 6 + \frac{36}{x_4 - 6}$$

となるが、 $x_4 > 42$ より、これは x_3 が整数であることに矛盾する。 $x_2=4$ のとき、⑦'は

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{x_4} \Leftrightarrow x_3 = 4 + \frac{16}{x_4 - 4}$$

となるが、 $x_4 > 42$ より、これも x_3 が整数であることに矛盾する。

[2] $x_1=3$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x_4} \quad \cdots \textcircled{7''}$$

$$3 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \cdots \textcircled{8''}$$

の整数解を考える。 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} - \frac{1}{x_4} < \frac{2}{3}$ に注意して、先と同様に x_2 の大きさを評価すると

$$x_2 = 3$$

となる。このとき、⑦''は

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x_4} \Leftrightarrow x_3 = 3 + \frac{9}{x_4 - 3}$$

となるが、 $x_4 > 42$ より、これは x_3 が整数であることに矛盾する。

以上[1], [2]より、条件を満たす整数解で $x_4 > 42$ を満たすものは存在しないことが示された。

したがって、条件を満たす整数解の x_4 で最も大きい値は42であることがわかる。

また、条件を満たす整数解で $x_4=12$ のものを考える。このとき

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{11}{12} \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 12 \quad \cdots \textcircled{10}$$

の整数解を考えればよい。先と同様に x_1 の大きさを評価すると

$$2 \leq x_1 \leq 3$$

となるから、 $x_1=2, 3$ のみ考えればよい。以下、それぞれの場合について考える。

[1]' $x_1=2$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{5}{12} \quad \cdots \textcircled{9'}$$

$$2 \leq x_2 \leq x_3 \leq 12 \quad \cdots \textcircled{10'}$$

の整数解を考える。先と同様に x_2 の大きさを評価すると

$$3 \leq x_2 \leq 4$$

となるから、 $x_2=3, 4$ のみ考えればよい。このとき、⑨'を満たす x_2, x_3 の組は

$$(x_2, x_3) = (3, 12), (4, 6)$$

であり、これらは⑩'を満たすから、整数解の個数は2個であることがわかる。

[2]' $x_1=3$ のとき

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{7}{12} \quad \cdots \textcircled{9''}$$

$$3 \leq x_2 \leq x_3 \leq 12 \quad \cdots \textcircled{10''}$$

の整数解を考える。先と同様に x_2 の大きさを評価すると

$$x_2 = 3$$

となるから、 $x_2=3$ のみ考えればよい。このとき、⑨''を満たす x_2, x_3 の組は

$$(x_2, x_3) = (3, 4)$$

であり、これは⑩''を満たすから、整数解の個数は1個であることがわかる。

以上[1]', [2]'より、条件を満たす整数解の個数は3個であり、それらの解のうち x_3 の値が最も小さいものは

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 4, 12)$$

であることがわかる。

2

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	3	2	1	2			
(2)	オ	カ					
	2	3					
(3)	キ						
	4						
(4)	(a)	ク	ケ	コ	サ	シ	
		5	5	1	9	3	
	(b)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
		5	1	5	4	9	3
	(c)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
		1	2	9	1	1	2

【解説】

(1)

与えられた条件より、

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x<-1) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+2 & (-1\leq x<1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -x+4 & (1\leq x<2) & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ x & (x\geq 2) & \cdots \cdots \textcircled{4}\end{cases}$$

が成り立つ。①のとき、

$$f(x)<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$$

となる。①の定義域を含めると

$$-\frac{3}{2}<x<-1$$

が成り立つ。②のとき、

$$f(x)<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+2<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$$

となる。②の定義域を含めると

$$-1\leq x<-\frac{1}{2}$$

が成り立つ。③のとき、

$$f(x)<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x+4<\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$$

となるがこれは $1\leq x<2$ に含まれない。④のとき、

$$f(x)<\frac{3}{2}$$

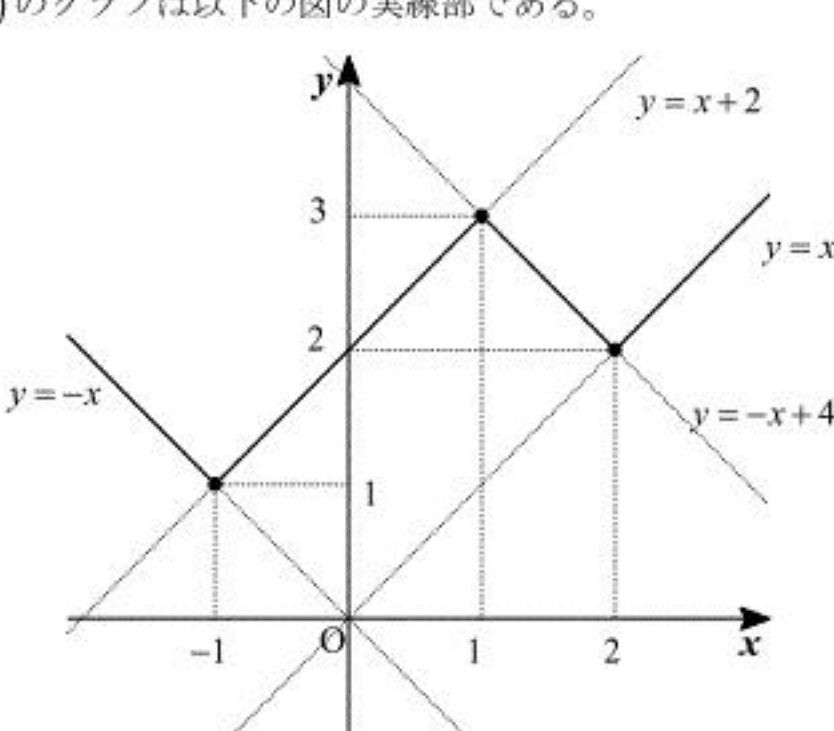
$$\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$$

となるがこれは $x\geq 2$ に含まれない。以上より $f(x)<\frac{3}{2}$ の解は

$$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$$

と求まる。

(2)

(1)より、 $y=f(x)$ のグラフは以下の図の実線部である。前図より、方程式 $f(x)=k$ がちょうど3個の解をもつのは

$$k=2, 3$$

のときである。

(3)

 $2<\sqrt{5}<3$ より、

$$\frac{17}{19}\sqrt{5}<\frac{17}{19}\cdot 3<3$$

となるため $\frac{17}{19}\sqrt{5}<3$ が成り立つ。また、 $\frac{17}{19}\sqrt{5}$ を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{17}{19}\sqrt{5} &= \frac{\sqrt{17^2\cdot 5}}{19} \\ &= \frac{\sqrt{1445}}{19}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}2 &= \frac{38}{19} \\ &= \frac{\sqrt{38^2}}{19} \\ &= \frac{\sqrt{1444}}{19}\end{aligned}$$

であることから、 $2<\frac{17}{19}\sqrt{5}$ が成り立つ。以上より

$$2<\frac{17}{19}\sqrt{5}<3$$

となり、(2)の図より方程式 $f(x)=\frac{17}{19}\sqrt{5}$ の解の個数は4個である。

(4)(a)

 $0\leq t\leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}I(t) &= \int_t^{t+1} (f(x))^2 dx \\ &= \int_t^1 (f(x))^2 dx + \int_1^{t+1} (f(x))^2 dx \\ &= \int_t^1 (x+2)^2 dx + \int_1^{t+1} (-x+4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+2)^3 \right]_t^1 + \left[-\frac{1}{3}(-x+4)^3 \right]_1^{t+1} \\ &= -5t^2 + 5t + \frac{19}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(b)

 $1\leq t\leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}I(t) &= \int_t^{t+1} (f(x))^2 dx \\ &= \int_t^2 (f(x))^2 dx + \int_2^{t+1} (f(x))^2 dx \\ &= \int_t^2 (-x+4)^2 dx + \int_2^{t+1} x^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(-x+4)^3 \right]_t^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_2^{t+1} \\ &= 5t^2 - 15t + \frac{49}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(c)

(a), (b)の答をそれぞれ平方完成すると、

$$-5t^2 + 5t + \frac{19}{3} = -5\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{91}{12}$$

$$5t^2 - 15t + \frac{49}{3} = 5\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{61}{12}$$

となる。したがって $0\leq t\leq 1$ において $t=\frac{1}{2}$ のとき $I(t)$ は最大値 $\frac{91}{12}$ をとり、 $1\leq t\leq 2$ において $t=1, 2$ のとき $I(t)$ は

$$5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{61}{12} = \frac{76}{12}$$

を最大値にとる。 $\frac{91}{12}>\frac{76}{12}$ より、 $0\leq t\leq 2$ で考えると、 $I(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ において最大値 $\frac{91}{12}$ をとる。

【解答】

(1)	ア	イ				
	1	2				
(2)	ウ	エ	オ	カ		
	2	3	1	2		
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	2	2	3	5	6
(4)	ス	セ	ソ	タ		
	1	2	1	3		
(5)	チ	ツ	テ	ト		
	5	6	1	3		
(6)	ナ	ニ				
	5	6				

【解説】

(1)

a_n が 5 の倍数または 3 の倍数であるという事象の余事象は、 a_n が 5 の倍数でも 3 の倍数でもないという事象であり、これはさいころを n 回投げて 1 回も 5 の倍数または 3 の倍数が出ないことに等しい。さいころの目が 5 の倍数または 3 の倍数でないのは 1, 2, 4 のときであることを踏まえると、その確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。したがって、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

(2)

a_n が 5 の倍数であるが、3 の倍数でない確率は、 a_n が 5 の倍数または 3 の倍数である確率から a_n が 3 の倍数である確率を引いた値に等しい。 a_n が 3 の倍数である確率は、(1) と同様に余事象を考えると

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

と求められるため、(1) の結果と合わせて求める確率は

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

(3)

a_n が 15 の倍数である、すなわち 5 の倍数かつ 3 の倍数である確率は、 a_n が 5 の倍数である確率から a_n が 5 の倍数であるが 3 の倍数でない確率を引いた値に等しい。 a_n が 5 の倍数である確率は、(1) と同様に余事象を考えると

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

と求められるため、(2) の結果と合わせて求める確率は

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である。

(4)

a_n が 3 の倍数であるが、2 の倍数でない確率は、 a_n が 3 の倍数または 2 の倍数である確率から a_n が 2 の倍数である確率を引いた値に等しい。 a_n が 3 の倍数または 2 の倍数である確率は、3 の倍数でも 2 の倍数でもない目が 1, 5 であることを踏まえると、

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と計算できる。また、 a_n が 2 の倍数である確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と計算できる。したがって、求める確率は

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

(5)

a_n が 2 の倍数であるが、5 の倍数でない確率は、 a_n が 2 の倍数または 5 の倍数である確率から a_n が 5 の倍数である確率を引いた値に等しい。 a_n が 2 の倍数または 5 の倍数である確率は、2 の倍数でも 5 の倍数でもない目が 1, 3 であることを踏まえると、

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と計算できる。また、 a_n が 5 の倍数である確率は

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

と計算できる。したがって、求める確率は

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

(6)

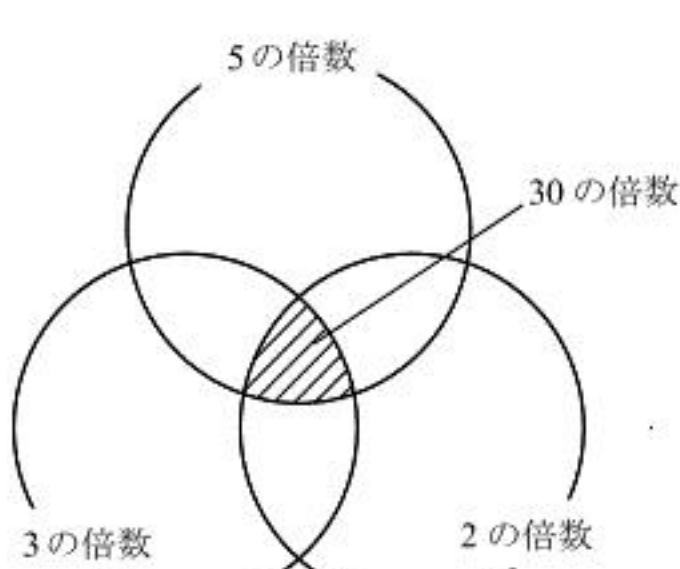
a_n が 5 の倍数であるが 3 の倍数でない確率を s_n 、 a_n が 3 の倍数であるが 2 の倍数でない確率を t_n 、 a_n が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない確率を u_n とおくと、(2), (4), (5) の結果より

$$s_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である。 a_n が 30 の倍数、すなわち 5 の倍数かつ 3 の倍数かつ 2 の倍数である確率 q_n は、 a_n が 5 の倍数または 3 の倍数または 2 の倍数である確率から、 s_n, t_n, u_n を引いた値に等しい。



a_n が 5 の倍数または 3 の倍数または 2 の倍数である確率は、5 の倍数、3 の倍数、2 の倍数のいずれでもない目が 1 であることを踏まえると、

$$1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

と計算できる。したがって、 q_n は

$$q_n = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n - s_n - t_n - u_n$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - q_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^n + s_n + t_n + u_n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \left\{ \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\log \left(\frac{5}{6}\right)^n + \log \left\{ \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} \right] \\ &= \log \frac{5}{6} \end{aligned}$$

となる。

4

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	2	1	2	1	2	5					
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	1	2	1	4	8	6	1	1	4	7	8
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	
	1	3	2	1	1	4	1	1	6	3	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 &> 0 \\
 \Leftrightarrow -(x+2)(x-4) &> 0 \\
 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \\
 g(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow -x + \frac{5}{4} &> 0 \\
 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4} \\
 h(x) &> 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &> 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &> 0 \\
 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x
 \end{aligned}$$

となる。 $f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ より

$$-2 < x < \frac{5}{4}$$

であり

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - (-2) &= \frac{5-\sqrt{5}}{2} > 0 \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) &= \frac{3+2\sqrt{5}}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < \frac{5}{4} \\
 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} &= \frac{2\sqrt{5}-3}{4} = \frac{\sqrt{20}-\sqrt{9}}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

となるから、 $f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ かつ $h(x) > 0$ となる x の値の範囲は

$$-2 < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

と求まる。

(2)

$-2 < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ のとき、3辺の長さを $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ とする三角形ができるための条件は

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} f(x) + g(x) > h(x) \\ g(x) + h(x) > f(x) \\ h(x) + f(x) > g(x) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} -2x^2 + 2x + \frac{41}{4} > 0 \\ 2x^2 - 4x - \frac{31}{4} > 0 \\ 2x + \frac{23}{4} > 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \left(x - \frac{2+\sqrt{86}}{4}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{86}}{4}\right) < 0 \\ \left(x - \frac{4+\sqrt{78}}{4}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{78}}{4}\right) > 0 \\ x > -\frac{23}{8} \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$8 < \sqrt{78} < 9 < \sqrt{86} < 10$$

より、

$$\begin{aligned}
 -\frac{23}{8} < -2 < \frac{2-\sqrt{86}}{4} < -\frac{7}{4} < \frac{4-\sqrt{78}}{4} \\
 \frac{2+\sqrt{86}}{4} < 3 < \frac{4+\sqrt{78}}{4}
 \end{aligned}$$

であるから、3辺長さがそれぞれ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ であるような三角形ができるための条件は

$$\begin{aligned}
 \frac{2-\sqrt{86}}{4} < x < \frac{4-\sqrt{78}}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{86} < x < 1 - \frac{1}{4}\sqrt{78}
 \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 &= -x + \frac{5}{4} \\
 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 27 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) &= 0 \\
 \therefore x &= -\frac{3}{2} \left(\because x < 1 - \frac{1}{4}\sqrt{78} < 0\right) \\
 g(x) &= h(x) \\
 \Leftrightarrow -x + \frac{5}{4} &= x^2 - x - 1 \\
 \Leftrightarrow 4x^2 &= 9 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) &= 0 \\
 \therefore x &= -\frac{3}{2} (x < 0) \\
 h(x) &= f(x) \\
 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= -x^2 + 2x + 8 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-3)\left(x + \frac{3}{2}\right) &= 0 \\
 \therefore x &= -\frac{3}{2} (\because x < 0)
 \end{aligned}$$

より、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を3辺とする三角形が二等辺三角形となるような x は

$$x = -\frac{3}{2}$$

の1個で、このとき

$$f(x) = g(x) = h(x)$$

となり、この三角形は正三角形となる。このとき、三角形の1辺の長さは

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

である。また、外接円の直径を R とすると、正弦定理より

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{11}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} &= R \\
 \therefore R &= \frac{11}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{11}{6}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

と求まる。

5

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ							
	1	2	2	1	2	2							
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
(3)	テ	ト	ナ	ニ									
	0	0	0	1									
(4)	ヌ												
	4												
(5)	ネ	ノ	ハ										
	1	2	2										
(6)	ヒ	フ											
	1	0											

【解説】

(1)

$x^4+1=0$ の解を $a+bi$ とおく。与方程式は、

$$\begin{aligned}x^4+1&=0 \\ \Leftrightarrow (x^2+i)(x^2-i)&=0 \\ \Leftrightarrow x^2&=-i, i\end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned}x^2&=-i \\ \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi&=-i \\ \Leftrightarrow (a,b)&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \\ x^2&=i \\ \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi&=i \\ \Leftrightarrow (a,b)&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

と a, b の値が求められる。これらのうち偏角が一番小さくなるのは $(a,b)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき

だから、 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ となる。

(2)

$Q_n(x)$ を x についての多項式とすると、 $x^n=(x^4+1)Q_n(x)+g_n(x)$ が成り立つ。 $x^4+1=0$ の α

以外の解を β, γ, δ とおく。

整式 x^n を整式 x^4+1 で割った余りは、実数 p, q, r, s を用いて px^3+qx^2+rx+s とおけるから、

$n=5$ のとき、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha^5=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ \beta^5=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ \gamma^5=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ \delta^5=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ -\beta=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ -\gamma=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ -\delta=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \therefore (p,q,r,s)=(0,0,-1,0)\end{aligned}$$

より、 $g_5(x)=-x$ である。同様に、 $n=6$ のとき

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha^6=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ \beta^6=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ \gamma^6=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ \delta^6=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ -\beta^2=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ -\gamma^2=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ -\delta^2=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \therefore (p,q,r,s)=(0,-1,0,0)\end{aligned}$$

より $g_6(x)=-x^2$ である。 $n=7$ のとき、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha^7=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ \beta^7=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ \gamma^7=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ \delta^7=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^3=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ -\beta^3=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ -\gamma^3=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ -\delta^3=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \therefore (p,q,r,s)=(-1,0,0,0)\end{aligned}$$

より $g_7(x)=-x^3$ である。

(3)

(2)と同様に考える。 $n=2016$ のとき $x^4+1=0$ を満たす x に対して $x^{2016}=(x^8)^{252}=1$ より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha^{2016}=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ \beta^{2016}=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ \gamma^{2016}=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ \delta^{2016}=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s \\ 1=p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s \\ 1=p\gamma^3+q\gamma^2+r\gamma+s \\ 1=p\delta^3+q\delta^2+r\delta+s \end{cases} \\ \therefore (p,q,r,s)=(0,0,0,1)\end{aligned}$$

より $g_{2016}(x)=1$ である。

(4)

$$\alpha^4=-1$$

であることと、任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha^n=(\alpha^4+1)Q_n(\alpha)+g_n(\alpha) \\ \alpha^{n+8}=(\alpha^4+1)Q_{n+8}(\alpha)+g_{n+8}(\alpha) \end{cases} \\ \therefore g_{n+8}(\alpha)=\alpha^n=g_n(\alpha) \left(\because \alpha^8=1 \right)\end{aligned}$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{31}g_k(\alpha)&=\sum_{k=1}^{32}g_k(\alpha)-g_{32}(\alpha) \\ &=4\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^3-1-\alpha-\alpha^2-\alpha^3+1\right)-1 \\ &=-1 \\ &=\alpha^4\end{aligned}$$

とわかる。

(5)

(4)と同様に考えると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{94}\left\{g_k(\alpha)\right\}^3&=\sum_{k=1}^{96}\left\{g_k(\alpha)\right\}^3-\left\{g_{93}(\alpha)\right\}^3-\left\{g_{96}(\alpha)\right\}^3 \\ &=12\left(\alpha^3+\alpha^6+\alpha^9+\alpha^{12}+\alpha^{15}+\alpha^{18}+\alpha^{21}+\alpha^{24}\right)-\left(-\alpha^3\right)^3-1^3 \\ &=12\left(\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1\right)^3-\alpha^9-1 \\ &=\alpha-1 \\ &=\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

と計算できる。よって求める虚部は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(6)

(4)と同様に考えると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1003}\left\{g_k(\alpha)\right\}^4&=\sum_{k=1}^{1000}\left\{g_k(\alpha)\right\}^4+\left\{g_{1001}(\alpha)\right\}^4+\left\{g_{1002}(\alpha)\right\}^4+\left\{g_{1003}(\alpha)\right\}^4 \\ &=125\left(\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{12}+\alpha^{16}+\alpha^{20}+\alpha^{24}+\alpha^{28}+\alpha^{32}\right)+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{12} \\ &=125(-1+1-1+1-1+1-1+1)-1+1-1 \\ &=-1\end{aligned}$$

と計算できる。よって求める実部は -1 、虚部は 0 である。

【解答】

(1)	ア													
	8													
(2)	イ	ウ	エ	オ										
	1	3	1	2										
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
	1	6	1	6	7	2	0	2	7	1	4	2	7	7
(4)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ							
	3	2	3	4	3	1	3							

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sin 4x + 2 \sin 2x \cos x}{\sin x} \\
 &= \frac{\sin 4x}{\sin x} + \frac{4 \sin x \cos^2 x}{\sin x} \\
 &= 4 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} + 4 \cos^2 x
 \end{aligned}$$

と変形できるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 = 8$$

となる。

(2)

 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x + 2 \sin 2x \cos x}{\sin x} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 4x + 2 \sin 2x \cos x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin 2x (\cos 2x + \cos x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos^2 x + \cos x - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 2x = 0, \cos x &= \frac{1}{2} \\
 \therefore x &= \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sin 4x + 2 \sin 2x \cos x}{\sin x} \\
 &= \frac{2 \sin 2x (2 \cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin x} \\
 &= \frac{4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin x} \\
 &= 4 \cos x (2 \cos^2 x + \cos x - 1) \\
 &= 8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x
 \end{aligned}$$

と変形できる。 $\cos x = t$ ($0 \leq t < 1$)として

$$g(t) = 8t^3 + 4t^2 - 4t$$

とおくと、

$$g'(t) = 24t^2 + 8t - 4$$

から

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 24t^2 + 8t - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 6t^2 + 2t - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6} \quad (\because 0 \leq t < 1)
 \end{aligned}$$

となるので、 $g(t)$ の増減は下表のようになる。

t	0	...	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(x)$			極小		

よって $g(t)$ は $t = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$ で最小値をとることがわかるから、

$$\cos a = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$$

となり、

$$\begin{aligned}
 f(a) &= g\left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right) \\
 &= 8\left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right)^3 + 4\left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right) \\
 &= \frac{20 - 14\sqrt{7}}{27}
 \end{aligned}$$

となる。

(4)

(2), (3)より $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を S とおくと

$$S = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x) dx$$

となる。ここで C_1, C_2 を積分定数として

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x) (\sin x)' dx \\
 &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 \\
 \int \cos^2 x dx &= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx \\
 &= \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C_2
 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 S &= -\left[8 \sin x - \frac{8}{3} \sin^3 x + \sin 2x + 2x - 4 \sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt{3} - \frac{4}{3} - \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

となる。