

1												
【解答】												
(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	3	4	4	4	1	2	7	6	7	1	1
	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ					
(2)	ト	ナ	ニ	ノ	ネ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	
	2	6	5	3	5	3	5	5	2	3	5	2
(3)	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ
	1	5	2	5	2	5	4	5	1	6	1	5

【解説】

(1)(a)

$$8x^2+24xy+18y^2-6x-9y-20=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

とすると、 $\textcircled{1}$ の左辺は

$$\begin{aligned} 8x^2+24x+18y^2-6x-9y-20 &= 2\left(4x^2+12xy+9y^2\right)-3(2x+3y)-20 \\ &= 2(2x+3y)^2-3(2x+3y)-20 \end{aligned}$$

と変形でき、 $A=2x+3y$ とおくと

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow 2A^2-3A-20=0 \\ &\Leftrightarrow (2A+5)(A-4)=0 \\ &\Leftrightarrow A=-\frac{5}{2}, 4 \end{aligned}$$

となり、 x, y が整数のとき、 $A=2x+3y$ より A も整数となるため、

$$A=4$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 4 \\ \Leftrightarrow 3y &= -2(x-2) \end{aligned}$$

と変形でき、2と3は互いに素であるから、ある整数 k を用いて

$$\begin{cases} x-2=-3k \\ y=2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3k+2 \\ y=2k \end{cases}$$

と表すことができる。これより、 $|x+y|$ は整数 k を用いて

$$|x+y| = |(-3k+2)+2k| = |-k+2|$$

と表せるため、 $|x+y|$ が最小となるのは $k=2$ のときであり、このとき

$$(x, y) = (-4, 4)$$

となる。また、 $-k+2$ は整数であるから、 $|x+y|$ が2番目に小さくなるのは

$$\begin{aligned} |-k+2| &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow k &= 1, 3 \end{aligned}$$

のときであり、このとき、順に

$$(x, y) = (-1, 2), (-7, 6)$$

となる。

(b)

$$f(n)=n^4-27n^2+121$$

とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= n^4-27n^2-121 \\ &= n^4+22n^2+121-27n^2-22n^2 \\ &= (n^2+11)^2-(7n)^2 \\ &= (n^2+7n+11)(n^2-7n+11) \end{aligned}$$

と因数分解される。よって、

$$|f(n)| = |n^2+7n+11||n^2-7n+11|$$

となり、 n が自然数のとき

$$n^2+7n+11 \geq 1+7+11 > 1$$

となるから、 $|f(n)|$ が素数のとき

$$\begin{cases} n^2+7n+11 = |f(n)| \\ n^2-7n+11 = \pm 1 \end{cases}$$

となることがわかる。以下 $n^2-7n+11=\pm 1$ について場合分けをして考える。

[1] $n^2-7n+11=1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2-7n+11 &= 1 \\ \Leftrightarrow n^2-7n+10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-2)(n-5) &= 0 \\ \therefore n &= 2, 5 \end{aligned}$$

となる。 $n=2$ のとき

$$n^2+7n+11=29$$

と計算でき、確かに $|f(n)|$ は素数となる。また、 $n=5$ のとき

$$n^2+7n+11=71$$

と計算でき、確かに $|f(n)|$ は素数となる。

[2] $n^2+7n+11=-1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2-7n+11 &= -1 \\ \Leftrightarrow n^2-7n+12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-3)(n-4) &= 0 \\ \therefore n &= 3, 4 \end{aligned}$$

となる。 $n=3$ のとき

$$n^2+7n+11=41$$

と計算でき、確かに $|f(n)|$ は素数となる。また、 $n=4$ のとき

$$n^2+7n+11=55$$

と計算でき、このとき $|f(n)|$ は素数ではない。

以上[1], [2]より、 $|f(n)|$ が素数となるような自然数 n は

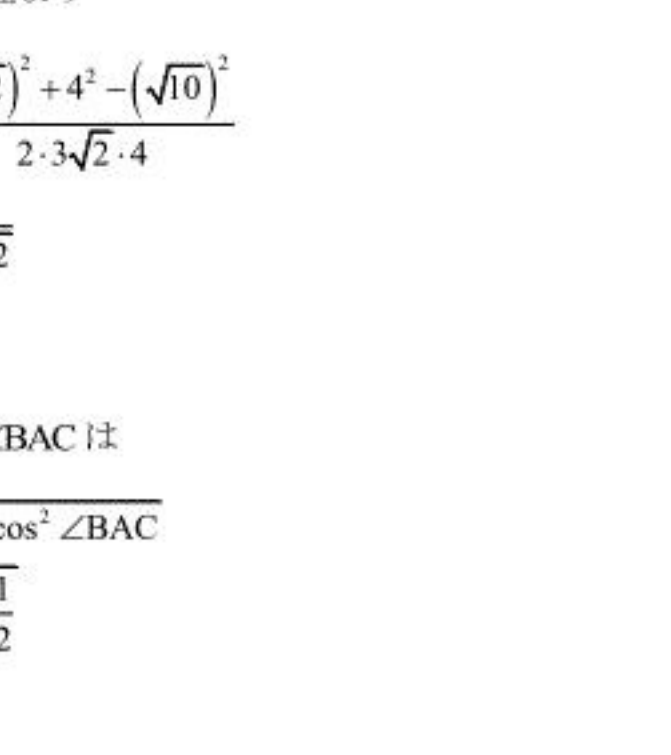
$$n=2, 3, 5$$

のちょうど3個存在し、それら3個の $|f(n)|$ の和は

$$29+71+41=141$$

である。

(2)(a)



△ABCにおいて余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{(3\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4} \\ &= \frac{24}{24\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

が得られ、これより $\sin \angle BAC$ は

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1-\cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって△ABCの面積は

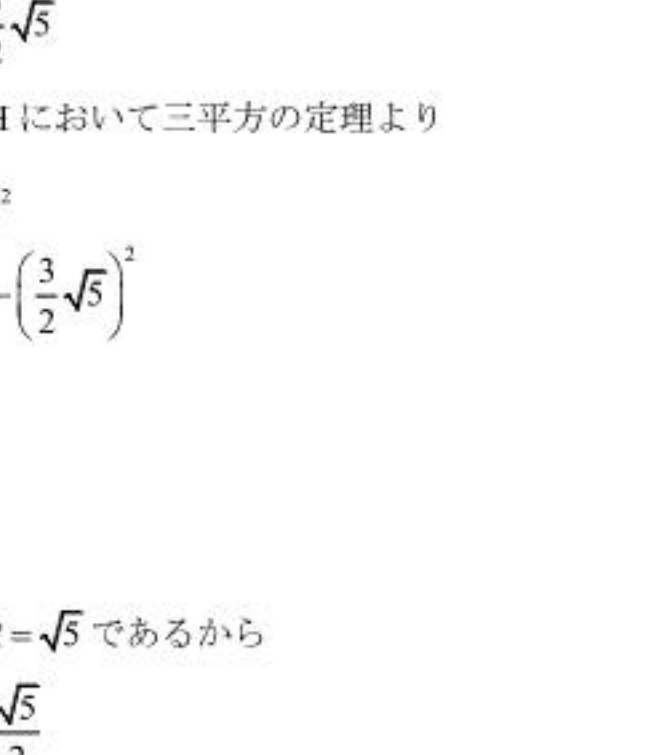
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sin \angle BAC &= 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。また、△ABCの外接円の半径を R とおくと、正弦定理より

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \angle BAC} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

(b)



四面体ABCDの体積は $3\sqrt{5}$ であるから

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5} &= \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot DH \\ \Leftrightarrow DH &= \frac{9\sqrt{5}}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

と分かる。また、△ADHにおいて三平方の定理より

$$\begin{aligned} AH^2 &= AD^2-DH^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore AH = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

となる。ここで、 $AP=R=\sqrt{5}$ であるから

$$PH=AH-AP=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

と求まる。ここで、△DAHは $AH=DH=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 、 $\angle AHD=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから、

線分DAの垂直二等分線は点Hを通り、 $\angle QHP=45^\circ$ となる。また、 $\angle QPH=90^\circ$ であるから、

△PQHもまた直角二等辺三角形であり、

$$PQ=PH=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

が成り立つ。以上より、 $PQ \parallel HD$ かつ $PQ=\frac{1}{3}HD$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD} \\ &= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AH}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AD}$ が互いに平行でなく、いずれも $\vec{0}$ でないことから、

$\overrightarrow{AQ}=p\overrightarrow{AP}+q\overrightarrow{AD}$ を満たす p, q の値は、係数比較を行うことで

$$p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{3}$$

と分かる。また、 $AP \perp PQ$ であるから△APQにおいて三平方の定理より

$$\begin{aligned} AQ^2 &= AP^2+PQ^2 \\ &= (\sqrt{5})^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \frac{25}{4} \\ \therefore AQ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

(3)(a)

複素数平面上で点 z が半直線 $z=(1+2i)t$ ($t>0$)上を動くとき

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{1}{z} \\ &= (1+2i)t + \frac{1}{(1+2i)t} \\ &= (1+2i)t + \frac{1-2i}{(1+2^2)t} \\ &= \left(\frac{1}{5t}+t\right) + \left(-\frac{2}{5t}+2t\right)i \end{aligned}$$

となる。よって、 x, y が実数であることから、 $w=x+yi$ に対して

$$x=\frac{1}{5t}+t, y=-\frac{2}{5t}+2t$$

が成立する。また、上式より、

$$\begin{cases} 2x+y=4t \\ 2x-y=\frac{4}{5t} \end{cases}$$

が成り立つから、辺々かけ合わせて

$$\begin{aligned} (2x+y)(2x-y) &= \frac{16}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{16}y^2 &= 1 \end{aligned}$$

が得られる。これは、点 (x, y) が双曲線 $\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{16}y^2=1$ 上を動くことを示している。

(b)

複素数平面上で点 z が半直線 $z=(1+ki)t$ ($t>0$)上を動くとき

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{1}{z} \\ &= (1+ki)t + \frac{1}{(1+ki)t} \\ &= (1+ki)t + \frac{1-ki}{(1+k^2)t} \\ &= \left\{t + \frac{1}{(1+k^2)t}\right\} + \left\{kt - \frac{k}{(1+k^2)t}\right\}i \end{aligned}$$

となる。よって、 x, y が実数であることから、 $w=x+yi$ に対して

$$x=t+\frac{1}{(1+k^2)t}, y=kt-\frac{k}{(1+k^2)t}$$

が成立する。また、上式より

$$\begin{cases} kx+y=2kt \\ kx-y=\frac{2k}{(1+k^2)t} \end{cases}$$

が成り立つから、辺々かけ合わせて

$$\begin{aligned} (kx+y)(kx-y) &= \frac{4k^2}{1+k^2} \\ \Leftrightarrow k^2x^2 - y^2 &= \frac{4k^2}{1+k^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = k^2x^2 - \frac{4k^2}{1+k^2} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。ここで、点 w が

$$|w+2| - |w-2| = 1$$

を満たすとき、 $w=x+yi$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2+y^2} - \sqrt{(x-2)^2+y^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2} &= 1 + \sqrt{(x-2)^2+y^2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、両辺は0以上より、両辺を2乗しても同値であるから、上式は

$$\begin{aligned} (x+2)^2+y^2 &= 1+2\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+y^2} &= 8x-1 \end{aligned}$$

となる。さらに、左辺は0以上であるから、 $x \geq \frac{1}{8}$ となり、その下で上式の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} 4\{(x-2)^2+y^2\} &= (8x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 4y^2 &= 60x^2-15 \end{aligned}$$

となる。さらに、上式に②を代入すると

$$\begin{aligned} 4\left(k^2x^2 - \frac{4k^2}{1+k^2}\right) &= 60x^2-15 \\ \Leftrightarrow 4(k^2-15)x^2 - \frac{16k^2}{1+k^2}+15 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(k^2-15)x^2 - \frac{k^2-15}{1+k^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k^2-15)\left(4x^2 - \frac{1}{1+k^2}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{3}$$

と変形できる。ここで、 $x=t+\frac{1}{(1+k^2)t}$ であり、 $t>0$ より $\frac{1}{(1+k^2)t}>0$ である。よって、相加・相乗平均の関係より

$$x \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{(1+k^2)t}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$$

$$\therefore x^2 \geq \frac{4}{1+k^2}$$

が得られる。ただし、等号成立は

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{(1+k^2)t} \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{1+k^2} \\ \therefore t &= \sqrt{\frac{1}{1+k^2}} \quad (\because t>0) \end{aligned}$$

のときである。よって

$$4x^2 - \frac{1}{1+k^2} \geq \frac{15}{1+k^2} > 0$$

となるから、③より

$$\begin{aligned} k^2-15 &= 0 \\ \therefore k &= \sqrt{15} \quad (\because k>0) \end{aligned}$$

が得られる。

2

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - sx \\ f'(x) &= 3x^2 - s\end{aligned}$$

より、 $C: y = f(x)$ の点 $P(p, f(p))$ における C の接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned}y &= f'(p) \cdot (x - p) + f(p) \\ &= (3p^2 - s)(x - p) + p^3 - ps \\ &= (3p^2 - s)x - 2p^3\end{aligned}$$

と表せる。点 Q は接線 ℓ_1 と C との共有点のうち点 P でないものであるから、 Q の x 座標は

$$\begin{aligned}x^3 - sx &= (3p^2 - s)x - 2p^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3p^2x + 2p^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - p)^2(x + 2p) &= 0 \\ \therefore x &= -2p \quad (\because x \neq p)\end{aligned}$$

と求められ、 $Q(-2p, -8p^3 + 2ps)$ である。

(答) $Q(-2p, -8p^3 + 2ps)$

(2)

点 $P(p, f(p))$ における接線 ℓ_1 の傾きは

$$f'(p) = 3p^2 - s$$

であり、点 $Q(-2p, -8p^3 + 2ps)$ における接線 ℓ_2 の傾きは

$$f'(-2p) = 12p^2 - s$$

である。したがって、 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき

$$\begin{aligned}f'(p) \cdot f'(-2p) &= -1 \\ \Leftrightarrow (3p^2 - s)(12p^2 - s) &= -1 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $t = p^2$ とおくと、 $p > 0$ より $\textcircled{1}$ を満たす p の個数は $\textcircled{1}$ を満たす t の正の解の個数に一致する。よって、2つの直線 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するような点 P がただ1つ存在することは、

$$\begin{aligned}(3t - s)(12t - s) &= -1 \\ \Leftrightarrow 36t^2 - 15st + s^2 + 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

を満たす t の正の解の個数が1つであることに等しい。ここで、 $\textcircled{2}$ を満たす解を α, β とおくと $s > 0$ より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha + \beta = 15s > 0 \\ \alpha\beta = s^2 + 1 > 0 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つから、 $\textcircled{2}$ を満たす実数解は必ず正となる。よって、 $\textcircled{2}$ を満たす t の正の解の個数が1つである条件は $\textcircled{2}$ が重解を持つことに等しいから、 $\textcircled{2}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &= 0 \\ \Leftrightarrow 225s^2 - 144(s^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 81s^2 - 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 &= \frac{16}{9} \\ \therefore s &= \frac{4}{3} \quad (\because s > 0)\end{aligned}$$

となる。これより、求める s の値は $s = \frac{4}{3}$ である。

(答) $s = \frac{4}{3}$

(3)

題意より曲線 C 上の点 $R_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ における接線は点 $R_n(x_n, y_n)$ を通る。したがって、(1)より点 R_n の x 座標 x_n は x_{n+1} を用いて

$$x_n = -2x_{n+1}$$

と表され、

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n$$

が成り立つ。 $x_1 = 2$ であることより、数列 $\{x_n\}$ は初項2、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、一般項 x_n は

$$x_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。よって、 R_n の y 座標 y_n は

$$\begin{aligned}y_n &= x_n^3 - sx_n \\ &= \left\{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^3 - 2s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} - 2s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

となる。これより、 $\left|-\frac{1}{8}\right| < 1$ および $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} y_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} - 2s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{8}{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)} - \frac{2s}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{64}{9} - \frac{4}{3}s\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{64}{9} - \frac{4}{3}s$

3

(1)

関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = e^{x+a}, g(x) = \log x - a$$

とおく。ここで、曲線 C_1 上の点 $P(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

である。よって、関数 $h(x)$ を

$$h(x) = f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\}$$

とおき、これを微分すると

$$h'(x) = f'(x) - f'(t)$$

$$h''(x) = f''(x)$$

$$= e^{x+a}$$

$$> 0$$

となるから、関数 $h'(x), h(x)$ の増減は以下の表のようになる。

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$h''(x)$	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、すべての実数 x に対して $h(x) \geq 0$ となるから、 P における C_1 の接線の方程式を $y = px + q$ とするとき、すべての実数 x に対して

$$e^{x+a} \geq px + q$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(2)

曲線 C 上の点 $P(t, f(t))$ における接線の傾きが1となるような t の値は

$$f'(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{t+a} = 1$$

$$\therefore t = -a$$

である。この点における接線の方程式は

$$y = f'(-a)(x+a) + f(-a)$$

$$\Leftrightarrow y = x + (a+1)$$

である。

(答) $y = x + (a+1)$

(3)

曲線 C_1 を表す方程式について、変形すると

$$y = e^{x+a}$$

$$\Leftrightarrow x + a = \log y$$

$$\Leftrightarrow x = \log y - a$$

となるから、曲線 $C_1: y = f(x)$ と $C_2: y = g(x)$ の式について、 $f(x)$ と $g(x)$ は互いに逆関数であることがわかる。したがって、曲線 C_1 と C_2 は直線 $y = x$ について対称であるから、曲線 C_1 と C_2 の共有点は曲線 C_1 と直線 $y = x$ の共有点と一致する。また、(2)で求めた接線の方程式は $a = -1$ のときに直線 $y = x$ と一致するから、以下 a の値について場合分けして考える。

[1] $a \leq -1$ のとき

関数 $i(x)$ を $i(x) = f(x) - x$ とおき、この関数の導関数、増減を調べると以下のようになる。

$$i'(x) = e^{x+a} - 1$$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$i'(x)$	$-$	0	$+$
$i(x)$	$\searrow$	$a+1$	$\nearrow$

ここで、 $i(-a) = (a+1) \leq 0$ であり、関数 $i(x)$ は連続関数であることから、 $i(x) = 0$ となる実数 x が存在する。したがって、曲線 $C_1: y = f(x)$ と直線 $y = x$ は共有点を持つことがわかる。

[2] $a > -1$ のとき

(1)の結果より、すべての実数 x について

$$f(x) \geq x + (a+1)$$

が成り立ち、また、すべての実数 x について

$$x + (a+1) > x$$

となるから、曲線 C_1 と直線 $y = x$ は共有点を持たないことがわかる。

以上[1], [2]より、曲線 C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の値の範囲は

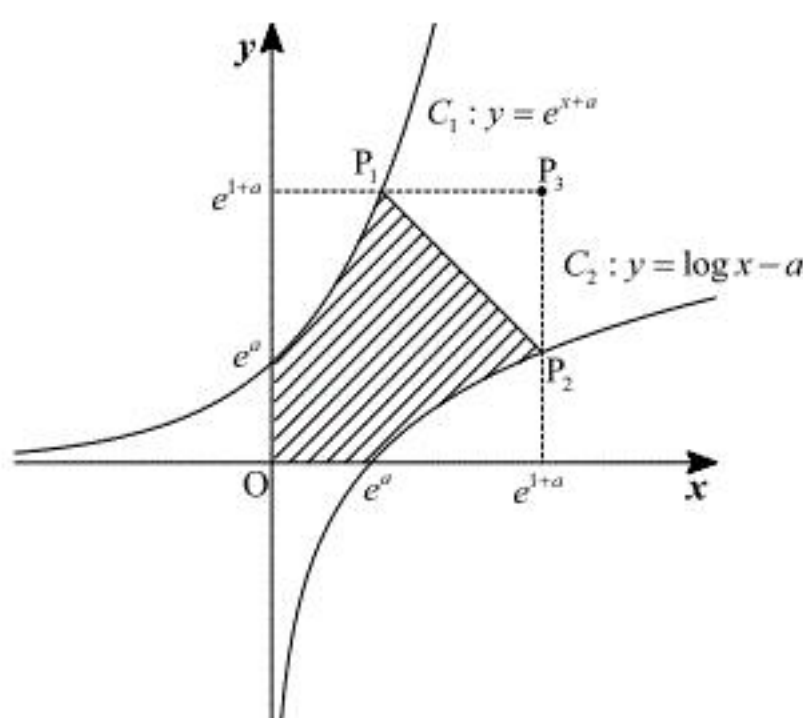
$$a > -1$$

であることがわかる。

(答) $a > -1$

(4)

面積 S は以下の斜線部の面積である。また、点 P_3 を $P_3(e^{1+a}, e^{1+a})$ とおく。



ここで、曲線 C_2 、 x 軸、直線 $x = e^{1+a}$ で囲まれる部分の面積を S_1 、 $\triangle PP_2P_3$ の面積を S_2 とおくと、斜線部は直線 $y = x$ に対して対称であることから、面積 S は

$$S = e^{1+a} \cdot e^{1+a} - 2S_1 - S_2$$

と立式できる。ここで、面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{e^a}^{e^{1+a}} (\log x - a) dx \\ &= [x \log x - x - ax]_{e^a}^{e^{1+a}} \\ &= \{(1+a)e^{1+a} - (1+a)e^{1+a}\} - \{ae^a - (1+a)e^a\} \\ &= e^a \end{aligned}$$

であり、面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} (e^{1+a} - 1)^2$$

であるから、面積 S は

$$\begin{aligned} S &= e^{2(1+a)} - 2e^a - \frac{1}{2} (e^{1+a} - 1)^2 \\ &= \frac{e^2}{2} e^{2a} + (e-2)e^a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $S = \frac{4}{e} - \frac{1}{2}$ となるような a の値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{e} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} e^{2a} + (e-2)e^a - \frac{1}{2} &= \frac{4}{e} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow e^3 e^{2a} + 2e(e-2)e^a - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^2 e^a - 4)(e e^a + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^a &= 4e^{-2} \quad (\because e^a > 0) \\ \therefore a &= \log 4 - 2 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a+1 &= \log 4 - 1 \\ &> 0 \quad (\because e < 4) \end{aligned}$$

であるから、 $a > -1$ を満たす。

(答) $a = \log 4 - 2$