

(1)

$$|y-x| = -x^2 + 3|x|$$

について、絶対値内の式の正負で場合分けを行う。

[1] $y-x \geq 0, x \geq 0$ のとき

$$y-x = -x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow y = -(x-2)^2 + 4$$

である。

[2] $y-x \geq 0, x < 0$ のとき

$$y-x = -x^2 + 3(-x)$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = -(x+1)^2 + 1$$

である。

[3] $y-x < 0, x \geq 0$ のとき

$$-(y-x) = -x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = (x-1)^2 - 1$$

である。

[4] $y-x < 0, x < 0$ のとき

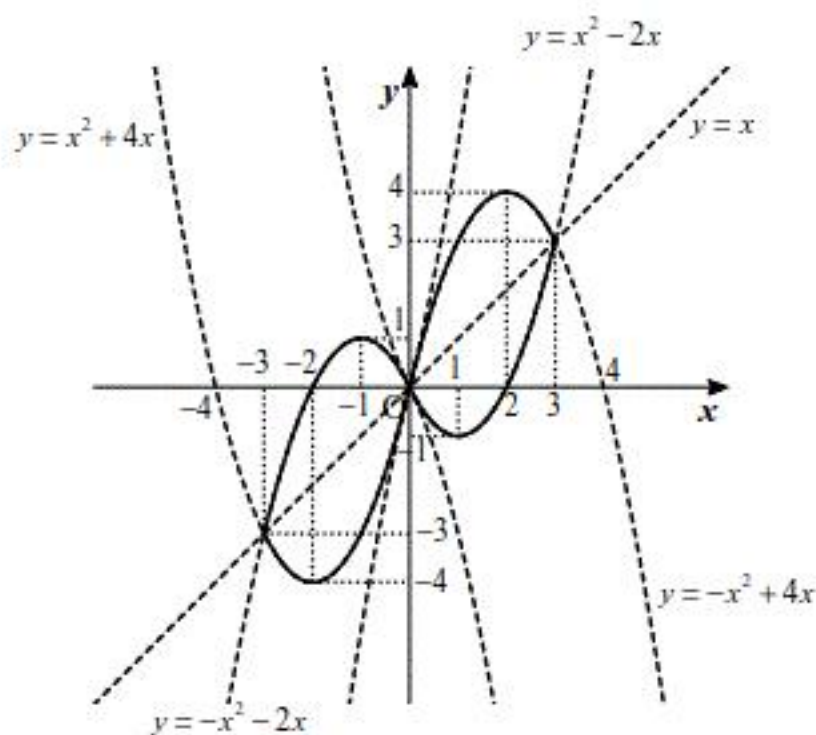
$$-(y-x) = -x^2 + 3(-x)$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 4$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]より、座標平面に D を図示すると以下のようになる。



(答) 前図(ただし端点 $(3, 3)$, $(0, 0)$, $(-3, -3)$ を含む)

(2)

$$|k-x| = -x^2 + 3|x|$$

・・・③

の実数解の個数は、直線 $y=k$ と集合 D の共有点の個数に等しい。したがって、(1)の図より、

③の解の個数は、

$$\begin{cases} 0 \text{ 個} & (k < -4, 4 < k \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (k = -4, 4 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (-4 < k < -1, 1 < k < 4 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (k = -1, 0, 1 \text{ のとき}) \\ 4 \text{ 個} & (-1 < k < 0, 0 < k < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} 0 \text{ 個} & (k < -4, 4 < k \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (k = -4, 4 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (-4 < k < -1, 1 < k < 4 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (k = -1, 0, 1 \text{ のとき}) \\ 4 \text{ 個} & (-1 < k < 0, 0 < k < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2

(1)

四面体 OABC は1辺の長さが1の正四面体だから、

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$$

である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり、同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2} \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2 &= |t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= t^2 |\overrightarrow{OB}|^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + (1-t)^2 |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= t^2 + 2t(1-t) \cdot \frac{1}{2} + (1-t)^2 \\ &= t^2 - t + 1\end{aligned}$$

を得る。また、点 P は辺 AB の中点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right) \cdot \{ t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC} \} \\ &= \frac{t}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1-t}{2}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{t}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1-t}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1-t}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad |\overrightarrow{OQ}|^2 = t^2 - t + 1, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

であるから、(1)と合わせて、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{t}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= \frac{2+t}{\sqrt{12(t^2 - t + 1)}} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta < \pi$ より、 θ が最小となるのは、 $\cos \theta$ が最大となるときである。さらに、 $0 \leq t \leq 1$ より $0 < t+2$ であるから、 $\textcircled{1}$ より $\cos \theta > 0$ となる。したがって、 $\cos \theta$ が最大となるのは $\cos^2 \theta$ が最大となるときである。以上より、

$$\left(\frac{2+t}{\sqrt{12(t^2 - t + 1)}} \right)^2 = \frac{(2+t)^2}{12(t^2 - t + 1)}$$

が最大となるとき θ は最小となる。

$$f(t) = \frac{(2+t)^2}{12(t^2 - t + 1)}$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{2(2+t)(t^2 - t + 1) - (2+t)^2(2t-1)}{12(t^2 - t + 1)^2} \\ &= \frac{(2+t)\{2(t^2 - t + 1) - (2+t)(2t-1)\}}{12(t^2 - t + 1)^2} \\ &= \frac{(2+t)(-5t+4)}{12(t^2 - t + 1)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{4}{5}$	...	1
$f'(t)$	+	+	0	-	-
$f(t)$		↗	最大	↘	

上表より、 $f(t)$ は $t = \frac{4}{5}$ のとき最大となり、よって、 θ は $t = \frac{4}{5}$ のとき最小となる。したがって、

θ を最小にする Q を Q* とすると、

$$\overrightarrow{OQ^*} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OQ^*} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$$

(1)

$\log(1+x)$ の原始関数の1つを $G(x)$ とすると

$$G'(x) = \log(1+x)$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{2t-1}^{t+4} \log(1+x) dx \\ &= [G(x)]_{2t-1}^{t+4} \\ &= G(t+4) - G(2t-1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(t) &= G'(t+4) - (2t-1)' \cdot G'(2t-1) \\ &= \log\{1+(t+4)\} - 2\log\{1+(2t-1)\} \\ &= \log \frac{t+5}{(2t)^2} \\ &= \log \frac{t+5}{4t^2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $f'(t) = \log \frac{t+5}{4t^2}$

(2)

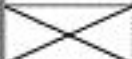
$t > 0$ の下で

$$\begin{aligned} f'(t) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t+5}{4t^2} &> 1 \\ \Leftrightarrow t+5 &> 4t^2 \\ \Leftrightarrow 0 &> 4t^2 - t - 5 \\ \Leftrightarrow 0 &> (4t-5)(t+1) \\ \Leftrightarrow 0 &< t < \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \\ f'(t) < 0 &\Leftrightarrow \frac{5}{4} < t \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $f(t)$ の増減表は以下ようになる。

t	(0)	...	$\frac{5}{4}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$

よって $f(t)$ を最大にする t の値は $t = \frac{5}{4}$ と求まり、このとき $f(t)$ の値は

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{5}{4}\right) \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} \log(1+x) dx \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} (1+x)' \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} (1+x) \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} 1 dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - (1+x) \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{21}{4}} \\ &= \left(\frac{25}{4} \log \frac{25}{4} - \frac{25}{4} \right) - \left(\frac{5}{2} \log \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{25}{4} \log \left(\frac{5}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} \log \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \\ &= \frac{25}{2} \log \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \log \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \\ &= 10 \log \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $t = \frac{5}{4}$ のとき $f(t) = 10 \log \frac{5}{2} - \frac{15}{4}$