

【解答】

(1)	ア	イ	ウ			
	1	6	4			
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	
	2	7	5	1	2	
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	3	8	7	5	1	2
(4)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
	2	2	5	5	1	2

【解説】

(1)

硬貨は全部で4枚あるから $x-y=2$ となるのは $(x, y)=(3, 1)$ のときである。どの硬貨が裏かで ${}_4C_1$ 通りあることに注意すると、1回の試行で $x-y=2$ となる確率は

$${}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

とわかる。各回の試行は独立であるから求める確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ とわかる。

(2)

$x=y$ となるのは $(x, y)=(2, 2)$ のときである。どの硬貨が表かで ${}_4C_2$ 通りあることに注意すると、1回の試行で $x=y$ となる確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

とわかる。各回の試行は独立であるから求める確率は $\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$ とわかる。

(3)

「3回のうち、少なくとも1回は $x=y$ となる」ことの余事象は「3回すべてにおいて、 $x \neq y$ になる」ことである。1回の試行で $x \neq y$ となる確率は(2)より

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

であるから3回すべてにおいて、 $x \neq y$ になる確率は $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}$ と求まる。したがって求める確率は

$$1 - \frac{125}{512} = \frac{387}{512}$$

である。

(4)

(2), (3)の過程より、1回の試行で $x=y$ となる確率は $\frac{3}{8}$ 、 $x \neq y$ とならない確率は $\frac{5}{8}$ である。3

回のうち何回目が $x=y$ になるかで ${}_3C_1$ 通りあることに注意すると、求める確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{225}{512}$$

となる。

(1)

数列 $\{a_n\}$ の漸化式より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{-2a_{n+1}+3}{a_{n+1}-2} \\ &= \frac{-2 \cdot \frac{5a_n-6}{2a_n-2} + 3}{\frac{5a_n-6}{2a_n-2} - 2} \\ &= \frac{-2(5a_n-6)+3(2a_n-2)}{(5a_n-6)-2(2a_n-2)} \\ &= 2 \cdot \frac{-2a_n+3}{a_n-2} \\ &= 2b_n \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{-2 \cdot 3 + 3}{3-2} = -3$ 、公比2の等比数列である。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = -3 \cdot 2^{n-1}$$

(2)

(1)の結果と b_n の定義より,

$$\begin{aligned} \frac{-2a_n+3}{a_n-2} &= -3 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow -2 - \frac{1}{a_n-2} &= -3 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_n-2} &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \\ \Leftrightarrow a_n - 2 &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 2} \\ \therefore a_n &= 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 2}$$

3

(1)

与式において、各ベクトルを成分表示して整理すると

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3\cdot 3 \\ y-3\cdot 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-9)(x+3)+(y-6)(y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-6x-27+y^2-4y-12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2 &= 52\end{aligned}$$

となる。これが点Pの軌跡の方程式である。

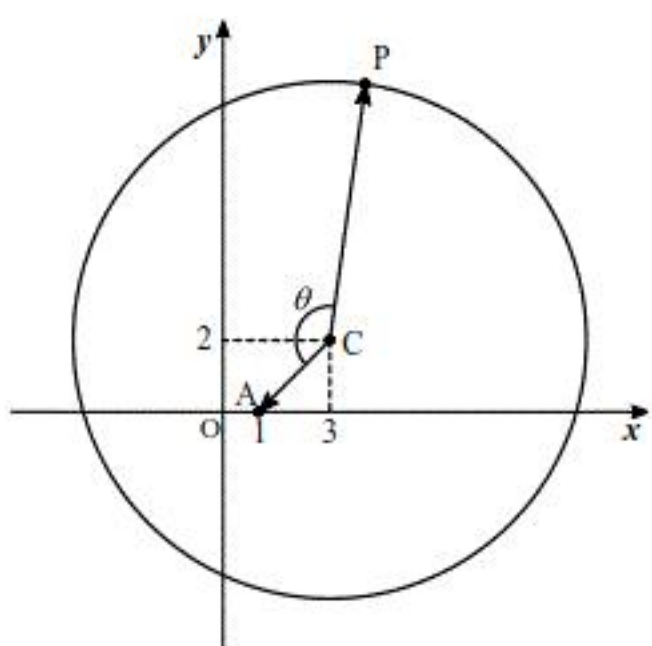
$$(\text{答}) \quad (x-3)^2+(y-2)^2=52$$

(2)

(1)より、点Pは点C(3, 2)を中心とする半径 $2\sqrt{13}$ の円上を動く。よって、 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} &= |\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CA}| \cos \theta \\ &= 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2} \cos \theta \\ &= 4\sqrt{26} \cos \theta\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\cos \theta$ の最大値、最小値を求めればよい。ここで、点Pの軌跡と2点A, Cを図示すると以下ようになる。



上図より、 $\theta=0, \pi$ となるような点Pはいずれも存在する。したがって、 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA}$ は $\theta=0$ となるとき最大値 $4\sqrt{26}$ をとり、 $\theta=\pi$ となるとき最小値 $-4\sqrt{26}$ をとる。以下、 $\theta=0, \pi$ となるとき点Pの座標を求める。 $\theta=0, \pi$ となるときいずれも $\overrightarrow{CP}$ は $\overrightarrow{CA}$ と平行であるから実数 k を用いて $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CA}$ とかける。すると、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}| &= |k| |\overrightarrow{CA}| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{13} &= 2\sqrt{2} |k| \\ \therefore k &= \pm \frac{\sqrt{26}}{2}\end{aligned}$$

となる。 $\theta=0$ となるとき $\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{CA}$ の向きは等しいから $k=\frac{\sqrt{26}}{2}$ である。よって、 $\theta=0$ となるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{\sqrt{26}}{2} \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{26}}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \therefore (x, y) &= (3-\sqrt{26}, 2-\sqrt{26})\end{aligned}$$

である。一方、 $\theta=\pi$ となるとき $k=-\frac{\sqrt{26}}{2}$ であるから、同様にして

$$(x, y) = (3+\sqrt{26}, 2+\sqrt{26})$$

である。以上より、 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA}$ は $(x, y) = (3-\sqrt{26}, 2-\sqrt{26})$ のとき最大値 $4\sqrt{26}$ をとり、

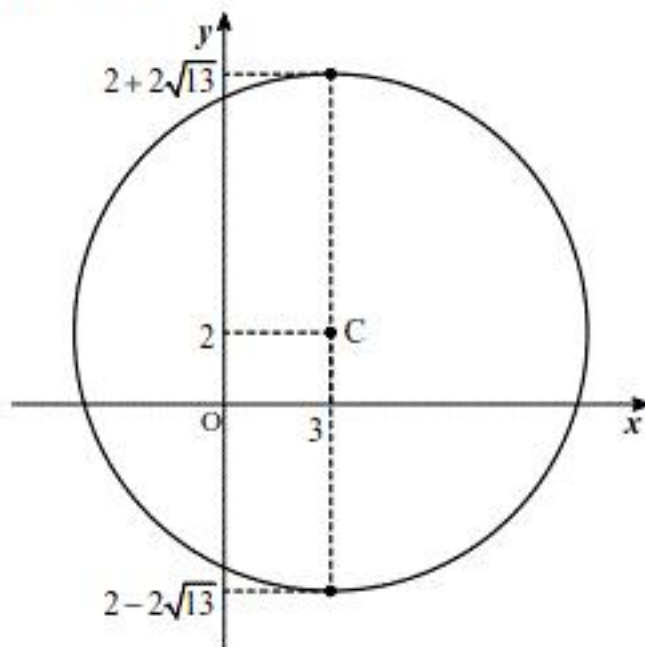
$(x, y) = (3+\sqrt{26}, 2+\sqrt{26})$ のとき最小値 $-4\sqrt{26}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad (3-\sqrt{26}, 2-\sqrt{26}) \text{のとき最大値 } 4\sqrt{26}, (3+\sqrt{26}, 2+\sqrt{26}) \text{のとき最小値 } -4\sqrt{26}$$

(3)

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y$$

であるから、点Pのy座標の最大値、最小値を求めればよい。ここで、(1)の結果より点Pの軌跡を図示すると以下ようになる。



上図より、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}$ 、すなわち点Pのy座標は、 $(x, y) = (3, 2+2\sqrt{13})$ のとき最大値 $2+2\sqrt{13}$ をとり、 $(x, y) = (3, 2-2\sqrt{13})$ のとき最小値 $2-2\sqrt{13}$ をとる。