

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	5	3	3	5	4
(2)	カ	キ			
	4	7			

〔解説〕

(1)

2 次方程式

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

について、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$$

である。したがって、 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ より a_1, a_2 は

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha + \beta \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 33 \end{aligned}$$

と計算できる。また、数列 $\{a_n\}$ は $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= 5a_n + 4a_{n-1} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。

(2)

 a_n を 10 で割った商を Q_n とすると、 a_n は

$$a_n = 10Q_n + r_n$$

と表せる。これを①に用いると、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5(10Q_n + r_n) + 4(10Q_{n-1} + r_{n-1}) \\ &= 10(5Q_n + 4Q_{n-1}) + 5r_n + 4r_{n-1} \end{aligned}$$

となることから、 a_n を 10 で割った余り r_{n+1} は $5r_n + 4r_{n-1}$ を 10 で割った余りに等しい。このもとで数列 $\{r_n\}$ を書きだすと、

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	$\cdots$
5	3	5	7	5	3	5	7	$\cdots$

となる。したがって、正の整数 n で $r_{n+1} = r_1, r_{n+2} = r_2$ を満たす最小のものは

$$n = 4$$

である。また、上の表より任意の正の整数 k について、

$$\begin{cases} r_{4k-3} = 5 \\ r_{4k-2} = 3 \\ r_{4k-1} = 5 \\ r_{4k} = 7 \end{cases}$$

であるため、

$$\begin{aligned} r_{2016} &= r_{4 \cdot 504} \\ &= 7 \end{aligned}$$

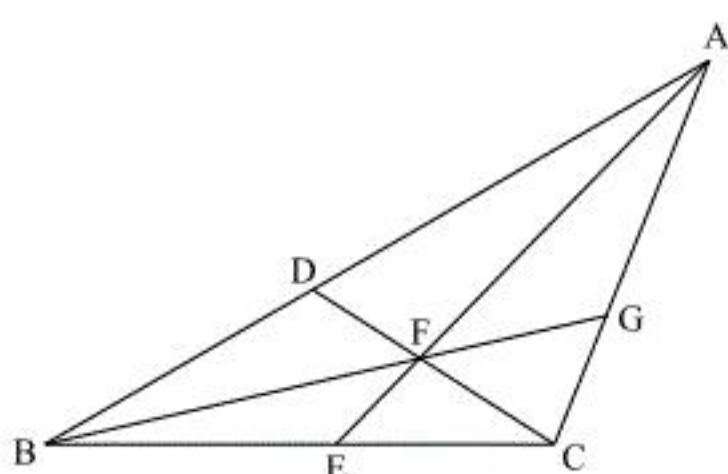
であることがわかる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	7	9	5	9	1	3	4	9
(2)	ケ	コ	サ	シ				
	2	3	3	2				

【解説】

(1)



△AECにメネラウスの定理を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{AF}{FE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CG}{GA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AF}{FE} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AF}{FE} &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

となり、AF:FE=7:2であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AE} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、△BCDにメネラウスの定理を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DA}{AB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{3}{5} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{CF}{FD} &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

となり、CF:FD=5:4であるから

$$\overrightarrow{CF} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CD}$$

となる。さらに、点Eは辺BCを4:3に内分する点であるから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

となるから、①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \frac{7}{9} \left(\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7} \right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

と表されることがわかる。

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{BA} + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{9}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{2}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \right)\end{aligned}$$

となるから、Gは辺ACを2:1に内分する点であり

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

となることがわかる。また、

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$$

となることがわかる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ		
	4	1	5	2	1		
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	3	6	1	0	9	1	3
※(3)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	5	9	8	8	1	2	

※(3)は条件 $\beta < 0 < \alpha$ を無視して得られた解答

【解説】

(1)

与えられた条件より

$$3\alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2 - 3\alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、 $R(2-3\alpha, (2-3\alpha)^2)$ であり、 $y=x^2$ のとき $y'=2x$ であるから、 C の Q における

接線の方程式は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \Leftrightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2$$

となり、同様に R における接線の方程式は

$$y = 2(2-3\alpha)x - (2-3\alpha)^2$$

となる。よって、これらを連立することにより、点 P の座標は

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ y = 2(2-3\alpha)x - (2-3\alpha)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ 2\{\alpha - (2-3\alpha)\}x = \alpha^2 - (2-3\alpha)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\alpha - 3\alpha^2 \\ x = 1 - \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $P(1-\alpha, 2\alpha-3\alpha^2)$ と求まる。したがって、 C' の方程式は

$$y = \{x - (1-\alpha)\}^2 + 2\alpha - 3\alpha^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、直線 QR の方程式は

$$y - \alpha^2 = \frac{(2-3\alpha)^2 - \alpha^2}{2-3\alpha-\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = (2-2\alpha)x + 3\alpha^2 - 2\alpha \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、②、③を連立することにより、直線 QR と C' の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} & \{x - (1-\alpha)\}^2 + 2\alpha - 3\alpha^2 = (2-2\alpha)x + 3\alpha^2 - 2\alpha \\ & \Leftrightarrow x^2 + 4(\alpha-1)x - 5\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \end{aligned}$$

を満たすことがわかる。

(2)

直線 QR と C' の交点の x 座標を a, b ($a < b$) とおくと、(1)の結果および解と係数の関係より、

$$\begin{cases} a+b = -4(\alpha-1) \\ ab = -5\alpha^2 + 2\alpha + 1 \end{cases}$$

を満たすから

$$\begin{aligned} (b-a)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= 16(\alpha-1)^2 - 4(-5\alpha^2 + 2\alpha + 1) \\ &= 36\left(\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore b-a = 6\sqrt{\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha + \frac{1}{3}} \quad (>0)$$

となる。これを用いて、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \left[(2-2\alpha)x + 3\alpha^2 - 2\alpha - \{x - (1-\alpha)\}^2 + 2\alpha - 3\alpha^2 \right] dx \\ &= -\int_a^b \{x^2 + 4(\alpha-1)x - 5\alpha^2 + 2\alpha + 1\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \\ &= 36\left(\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

を得る。

(3)

※以下、問題文の条件 $\beta < 0 < \alpha$ を無視して解くことにする。

S が最小になるのは、 $\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha + \frac{1}{3}$ が最小になるときである。ここで、この2次式を平方完成すると

$$\alpha^2 - \frac{10}{9}\alpha + \frac{1}{3} = \left(\alpha - \frac{5}{9}\right)^2 + \frac{2}{81}$$

となるから、 S は $\alpha = \frac{5}{9}$ のとき最小値 $36\left(\frac{2}{81}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ をとることがわかる。

※尚、このとき①より $\alpha = \frac{5}{9}$ 、 $\beta = \frac{1}{3}$ となるから、条件 $\beta < 0 < \alpha$ を満たさない。

※条件 $\beta < 0 < \alpha$ を用いて考えた場合は、 α のとりうる値の範囲は

$$\beta < 0 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3\alpha < 0 \\ 0 < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \alpha$$

となるが、 $\frac{2}{3} < \alpha$ において S は単調増加するため、最小値は存在しないことになる。