

T 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 ~ 5 の各文章中の ア , イ , ウ , ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1 a を実数として、関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{3}{4}\right)x$ を考える。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値は、小さい

方から順に $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$, ウ , エ である。

(2) $f(x)$ が極値をとるのは $a \neq \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ のときであり、このとき、極値をあたえる

x の値は $-\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$, $-\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}a + \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である。

(3) $a = \text{ウ}$ のとき、および $a = \text{エ}$ のときを考える。

(a) $a = \text{ウ}$ のとき、方程式 $f(x) = k$ が異なる 3 個の実数解をもつような

実数 k の値の範囲は $-\frac{\text{ス}}{\text{セソ}} < k < \text{タ}$ である。

(b) $a = \text{エ}$ のとき、方程式 $f(x) = k$ が異なる 3 個の実数解をもつような

実数 k の値の範囲は $-\frac{\text{チ}}{\text{ツ}} < k < \text{テ}$ である。

(20 点)

右のページは白紙です。

2

赤球 1 個と白球 4 個が入っている袋がある。この袋の中をよくかき混ぜた後、この袋から球を 1 個取り出す試行を考える。取り出した球が白球であったら球を袋にもどし、この試行を繰り返す。取り出した球が赤球であったら、試行を繰り返さず終了する。

(1) ちょうど 4 回目に終了する確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ウ} & \text{エ} & \text{オ} \\ \hline \end{array}}$ であり、3 回目までに終了する確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{カ} & \text{キ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ク} & \text{ケ} & \text{コ} \\ \hline \end{array}}$ である。また、4 回目までに終了しない確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{サ} & \text{シ} & \text{ス} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{セ} & \text{ソ} & \text{タ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(注意：“ n 回目まで”とは、1 回目、2 回目、 $\dots$ 、 n 回目のことである。)

(2) A さんと B 君の 2 人が、A さん、B 君の順で交互に試行を行い、先に赤球を取り出した人の勝ちとする。自然数 n に対して、A さんが、A さんの n 回以内の試行で勝つ確率を p_n とする。B 君が、B 君の n 回以内の試行で勝つ確率を q_n とする。そのとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{チ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{テ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ト} \\ \hline \end{array}}$$

である。

(3) A さんと B 君の 2 人で、まず A さんが 100 回を限度として試行を繰り返す。次に B 君が 100 回を限度として試行を繰り返し、より少ない回数で赤球を取り出した人の勝ちとする。2 人のうち 1 人のみが 100 回の試行で赤球を取り出せない場合は、赤球を取り出した人の勝ちとし、2 人とも赤球を取り出せない場合は、どちらも勝ちではないとして終了する。

そのとき、B 君が勝つ確率が $\frac{99}{100}$ 以上になるのは、A さんが $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ナ} & \text{ニ} \\ \hline \end{array}$ 回目までに赤球を取り出せなかったときである。(注意： $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$)

(20 点)

右のページは白紙です。

3

O を原点とする xy 平面上に 2 点 $A(9, 4)$, $B(6, 8)$ をとり、この平面上で 3 つの三角形 $\triangle POA$, $\triangle POB$, $\triangle PAB$ の面積がすべて等しいような点 P を考える。

(1) 点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるとき、 P の座標は (,) である。

(2) 点 P が $\triangle OAB$ の外部にあるとき、そのような点 P は 3 個ある。それらを x 座標の小さい順に P_1 , P_2 , P_3 とおく。

(a) P_1 , P_2 , P_3 の座標は、それぞれ

(- ,), (, -), (,)

である。

(b) この平面上で、 $\triangle P_1P_2P_3$ の外部にあり、 $\triangle QP_1P_2$, $\triangle QP_1P_3$, $\triangle QP_2P_3$ の面積がすべて等しいような点 Q は 3 個ある。それらを Q_1 , Q_2 , Q_3 とおくと、 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ の面積は、 $\triangle OAB$ の面積の 倍になる。

(20 点)

右のページは白紙です。

4

xy 平面上において、双曲線 $x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C とする。 $a_0 = 1$ として、点 $P_1(0, a_0)$ から C に接線をひき、接点を $T_1(a_1, b_1)$ とおく。次に、点 $P_2(0, a_1)$ から C に接線をひき、接点を $T_2(a_2, b_2)$ とおく。順次、このようにして点 $P_{n+1}(0, a_n)$ から C に接線をひき、接点を $T_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ とおく ($n = 2, 3, \dots$)。

(1) 直線 P_1T_1 の方程式は $y = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$ であり、 $a_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $a_{n+1} = \sqrt{\boxed{\text{カ}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}a_n^2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。

(3) k は定数として、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $c_n = \frac{1}{a_n^2 + k}$ とおくと

$$c_{n+1} = pc_n + q \quad (\text{ただし、} p, q \text{ は定数で、かつ } |p| < 1)$$

が成り立つとき

$$k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}, \quad p = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad q = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。このとき

$$c_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \left(-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^n + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

(4) n が限りなく大きくなるとき、点 T_n は $\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}, -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}} \right)$ に限りなく近づく。

(20 点)

右のページは白紙です。

5

$k = 1, 2$ に対して, $f_k(x) = e^{-x} \cos kx$, $g_k(x) = e^{-x} \sin kx$ とおく。ただし, e は自然対数の底である。

(1) (a) 実数 t に対して

$$\int_0^t f_2(x) dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \left(-f_2(t) + \boxed{\text{ウ}} g_2(t) + \boxed{\text{エ}} \right),$$

$$\int_0^t g_2(x) dx = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \left(-\boxed{\text{キ}} f_2(t) - g_2(t) + \boxed{\text{ク}} \right)$$

となる。

(b) $\int_0^{2\pi} f_1(x) dx = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} (1 - e^{-2\pi})$, $\int_0^{2\pi} g_1(x) dx = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} (1 - e^{-2\pi})$ である。

(2) a を実数とする。 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, $0 \leq y \leq e^{-x} |a + \cos 2x|$ が表す領域を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_f とする。また, $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, $0 \leq y \leq e^{-x} |a + \sin 2x|$ が表す領域を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_g とする。

(a)
$$V_f = \pi(1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} a^2 + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} a + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}} \right),$$

$$V_g = \pi(1 - e^{-2\pi}) \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} a^2 + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \right)$$

である。

(b) a が実数全体を動くとき, V_f, V_g を最小にする a の値をそれぞれ a_f, a_g とおくと

$$a_f = -\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \quad a_g = -\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

(20 点)

右のページは白紙です。