

# U 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 6 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
  - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
  - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。  
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

1 ~ 6 の各問題文中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、値が根号を含む場合は、根号の中にあらわれる自然数が最小になる形で表すものとする。また、分数は既約分数として表しなさい。なお、アなどは既出のアなどを表す。

1 方程式

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$$

の整数解で条件  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$  をみたすものを考える。

- (1)  $n = 2$  のとき、条件をみたす整数解  $(x_1, x_2)$  の個数は ア 個である。
- (2)  $n = 3$  のとき、条件をみたす整数解  $(x_1, x_2, x_3)$  の個数は イ 個であり、それらの解のうち  $x_1 + x_2 + x_3$  の値が最も大きいものは  $(x_1, x_2, x_3) = (\text{ウ}, \text{エ}, \text{オ})$  である。
- (3)  $n = 4$  のとき、条件をみたす整数解  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  の  $x_4$  で最も大きい値は カ キ である。また、条件をみたす整数解で  $x_4 = 12$  のものは ク 個ある。この ク 個の解のうち、 $x_3$  の値が最も小さいのは

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\text{ケ}, \text{コ}, \text{サ}, 12)$$

である。

(15 点)

右のページは白紙です。

2

 $x$  の関数

$$f(x) = |x+1| - |x-1| + |x-2|$$

を考える。

- (1) 不等式  $f(x) < \frac{3}{2}$  の解は

$$-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} < x < -\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

- (2) 実数  $k$  に対して、方程式  $f(x) = k$  がちょうど 3 個の解をもつのは  $k = \boxed{\text{オ}}$

と  $k = \boxed{\text{カ}}$  のときである。ただし  $\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$  とする。

- (3) 方程式  $f(x) = \frac{17}{19}\sqrt{5}$  の解の個数は  $\boxed{\text{キ}}$  個である。

- (4) 実数  $t$  に対して

$$I(t) = \int_t^{t+1} (f(x))^2 dx$$

とおく。

- (a)  $0 \leq t \leq 1$  のとき、

$$I(t) = -\boxed{\text{ク}} t^2 + \boxed{\text{ケ}} t + \frac{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

- (b)  $1 \leq t \leq 2$  のとき、

$$I(t) = \boxed{\text{ス}} t^2 - \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} t + \frac{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

- (c)  $0 \leq t \leq 2$  で考えると、 $I(t)$  は  $t = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$  において、最大値  $\frac{\boxed{\text{ナ}} \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}}$  をとる。

(20 点)

右のページは白紙です。

3

さいころを  $n$  回投げ、第 1 投目から第  $n$  投目までに出了すべての目の積を  $a_n$  とする。例えば  $n = 3$  で、第 1 投目と第 2 投目に「3」が出て、第 3 投目に「6」が出た場合  $a_3 = 3 \times 3 \times 6 = 54$  である。

- (1)  $a_n$  が 5 の倍数または 3 の倍数である確率は  $1 - \left(\frac{\text{ア}}{\text{イ}}\right)^n$  である。
- (2)  $a_n$  が 5 の倍数であるが、3 の倍数でない確率は  $\left(\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\right)^n - \left(\frac{\text{オ}}{\text{カ}}\right)^n$  である。
- (3)  $a_n$  が 15 の倍数である確率は  $1 + \left(\frac{\text{キ}}{\text{ク}}\right)^n - \left(\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}\right)^n - \left(\frac{\text{サ}}{\text{シ}}\right)^n$  である。ただし  $\text{コ} < \text{シ}$  とする。
- (4)  $a_n$  が 3 の倍数であるが、2 の倍数でない確率は  $\left(\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\right)^n - \left(\frac{\text{ソ}}{\text{タ}}\right)^n$  である。
- (5)  $a_n$  が 2 の倍数であるが、5 の倍数でない確率は  $\left(\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\right)^n - \left(\frac{\text{テ}}{\text{ト}}\right)^n$  である。
- (6)  $a_n$  が 30 の倍数である確率を  $q_n$  とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - q_n) = \log \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$$

である。ただし、対数は自然対数を表すものとする。

(15 点)

右のページは白紙です。

4

関数  $f(x), g(x), h(x)$  を

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$

$$g(x) = -x + \frac{5}{4}$$

$$h(x) = x^2 - x - 1$$

により定める。

- (1)  $f(x) > 0$  かつ  $g(x) > 0$  かつ  $h(x) > 0$  となる  $x$  の値の範囲は

$$-\boxed{\text{ア}} < x < \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

- (2)  $x$  が (1) で求めた範囲にあるとき、3 辺の長さがそれぞれ  $f(x), g(x), h(x)$  であるような三角形ができるための条件は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \sqrt{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}}} < x < \boxed{\text{ス}} - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \sqrt{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}}$$

である。

- (3) (2) で作られた三角形が二等辺三角形となるような  $x$  の値は  $\boxed{\text{ツ}}$  個ある。作られた三角形が正三角形になるときの  $x$  の値は  $x = -\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$  であり、その正三角形の1辺の長さは  $\frac{\boxed{\text{ナ}} \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$  である。またその正三角形の外接円の直径は  $\frac{\boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$  である。

(15 点)

右のページは白紙です。

5

自然数  $n$  に対し、整式  $x^n$  を整式  $x^4 + 1$  で割った余りを  $g_n(x)$  とする。

- (1) 方程式  $x^4 + 1 = 0$  の解のうち、偏角が一番小さいもの  $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}} i$$

である。ただし、 $i$  は虚数単位で、複素数の偏角は  $0$  以上  $2\pi$  未満の範囲で考えるものとする。

- (2)  $g_5(x), g_6(x), g_7(x)$  は

$$g_5(x) = -\boxed{\text{キ}} x^3 - \boxed{\text{ク}} x^2 - \boxed{\text{ケ}} x - \boxed{\text{コ}}$$

$$g_6(x) = -\boxed{\text{サ}} x^3 - \boxed{\text{シ}} x^2 - \boxed{\text{ス}} x - \boxed{\text{セ}}$$

$$g_7(x) = -\boxed{\text{ソ}} x^3 - \boxed{\text{タ}} x^2 - \boxed{\text{チ}} x - \boxed{\text{ツ}}$$

である。

- (3)  $g_{2016}(x)$  は

$$g_{2016}(x) = \boxed{\text{テ}} x^3 + \boxed{\text{ト}} x^2 + \boxed{\text{ナ}} x + \boxed{\text{ニ}}$$

である。

以下では、 $\alpha$  は (1) で求めたものとする。

- (4)  $\sum_{k=1}^{31} g_k(\alpha) = \alpha^{\boxed{\text{ハ}}}$  である。

- (5)  $\sum_{k=1}^{94} (g_k(\alpha))^3$  の虚部は  $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$  である。

- (6)  $\sum_{k=1}^{1003} (g_k(\alpha))^4$  の実部は  $-\boxed{\text{ヒ}}$ ，虚部は  $\boxed{\text{フ}}$  である。

(15 点)

右のページは白紙です。

6

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  をみたす実数  $x$  の範囲を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{\sin 4x + 2 \sin 2x \cos x}{\sin x}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 右側極限  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  は  $\boxed{\text{ア}}$  である。

(2)  $f(x) = 0$  の解は  $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$  と  $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$  である。ただし  $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} < \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$  とする。

(3)  $f(x)$  は  $x = a$  で最小値をとるとする。このとき

$$\cos a = -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

$$f(a) = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}} - \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(4) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} - \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\pi$$

である。

(20 点)

右のページは白紙です。