

S 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ロ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、ウ などは既出の ウ を表す。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) (a) x, y に関する方程式

$$8x^2 + 24xy + 18y^2 - 6x - 9y - 20 = 0 \quad \text{①}$$

を考える。 $A = 2x + 3y$ とおくと、① は

$$\text{ア} A^2 - \text{イ} A - 20 = 0$$

と表される。したがって、 x, y が整数で①を満たすとするとき $A = \text{ウ}$ である。これより、 $2x + 3y = \text{ウ}$ を満たす整数の組 (x, y) のうち、 $|x + y|$ が最小になるのは $(x, y) = (-\text{エ}, \text{オ})$ のときで、 $|x + y|$ が 2 番目に小さくなるのは

$$(x, y) = (-\text{カ}, \text{キ}), (-\text{ク}, \text{ケ})$$

のときである。ただし、 $\text{キ} < \text{ケ}$ とする。

(b) $f(n) = n^4 - 27n^2 + 121$ とすると

$$f(n) = (n^2 + \text{コ}n + \text{サシ})(n^2 - \text{ス}n + \text{セソ})$$

と因数分解される。したがって、 $|f(n)|$ が素数となるような自然数 n はちょうど タ 個存在する。また、それら タ 個の素数 $|f(n)|$ の和は チツテ である。ただし、素数とは正の約数が 1 とその数自身のみであるような 2 以上の自然数である。

右のページは白紙です。

- (2) 空間内に四面体 ABCD がある。△ABC の外心を P とし、点 D から平面 ABC に下ろした垂線が平面 ABC と交わる点を H とする。このとき、線分 AH の上に点 P があるものとする。さらに、四面体 ABCD の体積が $3\sqrt{5}$ であり、

$$AB = 4, \quad BC = \sqrt{10}, \quad CA = 3\sqrt{2}, \quad DA = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

であるとする。

- (a) △ABC において、 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$ であり、△ABC の面積は $\boxed{\text{ナ}}$ である。また、△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

- (b) 以下では平面 ADH 上で考える。体積の条件から $DH = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{2}$ がわかり、△DAH において $AH = \frac{\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{2}$ だから $PH = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{2}$ である。点 P を通り直線 AH に直交する直線を ℓ とし、線分 DA の垂直二等分線と ℓ の交点を Q とする。

$$\overrightarrow{AQ} = p\overrightarrow{AP} + q\overrightarrow{AD}$$

とおくと、

$$p = \frac{1}{\boxed{\text{フ}}}, \quad q = \frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}}, \quad AQ = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

がわかる。点 Q は 4 点 A, B, C, D から同じ距離にあるので、Q を中心とする半径 $\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$ の球面は四面体 ABCD に外接していることがわかる。

右のページは白紙です。

- (3) 複素数 z ($z \neq 0$) に対して、 $w = z + \frac{1}{z}$ とし、 $w = x + yi$ (w の実部を x , 虚部を y) とする。ただし、 i は虚数単位を表すものとする。

- (a) 複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1 + 2i)t$ ($t > 0$) 上を動くとする。このとき、 $w = x + yi$ に対して

$$x = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ム}}} + t, \quad y = -\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} + \boxed{\text{ヤ}} t$$

が成立し、点 (x, y) は、双曲線

$$\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}} x^2 - \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}} \boxed{\text{ル}}} y^2 = 1$$

上を動く。

- (b) k を正の実数とする。複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1 + ki)t$ ($t > 0$) 上を動くとき、点 w が

$$|w + 2| - |w - 2| = 1$$

を満たすとする。このとき $k = \sqrt{\boxed{\text{レ}} \boxed{\text{ロ}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 正の実数 s に対し、3 次関数 $f(x)$ と曲線 C を

$$f(x) = x^3 - sx, \quad C: y = f(x)$$

で定める。 p を正の実数とし、 C 上の点 $P(p, f(p))$ における C の接線を ℓ_1 とする。接線 ℓ_1 と C との共有点で P と異なる点を Q とし、 Q における C の接線を ℓ_2 とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) 2 つの直線 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するような C 上の点 $P(p, f(p))$ ($p > 0$) がただ 1 つ存在するときの s の値を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 $R_1(2, f(2))$ をとり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 R_n から点 R_{n+1} を次の規則で定める。

「点 R_n を通る直線で R_n 以外の点で C に接するものを考え、その接点を R_{n+1} とする。」

点 R_n の座標を (x_n, y_n) とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ の値を s を用いて表せ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 実数 a に対し、座標平面における 2 つの曲線

$$C_1 : y = e^{x+a}, \quad C_2 : y = \log x - a$$

を考える。ここで、 e は自然対数の底で、 $\log x$ は自然対数である。

- (1) 曲線 C_1 上に点 P をとり、 P における C_1 の接線の方程式を $y = px + q$ とする。このとき、すべての実数 x に対して

$$e^{x+a} \geq px + q$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 曲線 C_1 の接線で、直線 $y = x$ に平行なものの方程式を a を用いて表せ。
(3) 曲線 C_1 と C_2 が共有点をもたないような、 a の値の範囲を求めよ。
(4) (3) の条件の下で、 C_1 上の点 $P_1(1, e^{1+a})$ と C_2 上の点 $P_2(e^{1+a}, 1)$ をとる。このとき、 x 軸、曲線 C_2 、線分 P_1P_2 、曲線 C_1 、 y 軸で囲まれた図形の面積を S とし、 $S = \frac{4}{e} - \frac{1}{2}$ となるような a の値を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。