

1

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ | カ |   |
|     | 2 | 1 | 5 | 2 | 4 | 2 |   |
| (2) | キ | ク | ケ | コ |   |   |   |
|     | 2 | 3 | 2 | 3 |   |   |   |
| (3) | サ | シ | ス | セ |   |   |   |
|     | 6 | 3 | 2 | 3 |   |   |   |
| (4) | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ |
|     | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| (5) | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ |   |   |
|     | 3 | 3 | 9 | 1 | 8 |   |   |

【解説】

(1) 3次関数  $f(x)$  が  $x=1, 4$  で極値をとるとき、2次方程式  $f'(x)=0$  の実数解は  $x=1, 4$  となるから、実数  $a(\neq 0), b$  を定数として

$$\begin{aligned}f'(x) &= a(x-1)(x-4) \\f(x) &= \int_0^x f(t) dt + b \\&= \int_0^x a(t^2 - 5t + 4) dt + b \\&= \left[ \frac{a}{3} t^3 - \frac{5}{2} at^2 + 4at \right]_0^x + b \\&= \frac{a}{3} x^3 - \frac{5}{2} ax^2 + 4ax + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \{a(x^2 - 5x + 4)\}' \\&= 2ax - 5a\end{aligned}$$

と表せる。また、問題文の条件から

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f''(0)=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ -5a=-30 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = (6, 2)$$

となるから、求める関数  $f(x)$  は  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 2$  であることがわかる。

(2)

3次関数  $g(x)$  が極値をもつのは、2次方程式  $g'(x)=0$  が異なる2つの実数解をもつときであり、ここで

$$g(x) = x^3 - ax^2 + 4x - 3$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2ax + 4$$

であるから、求める条件は、2次関数の判別式を考えて

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 > 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 48 > 0$$

$$\therefore |a| > 2\sqrt{3}$$

となる。また、 $a > 0$  のとき、2次方程式  $g'(x)=0$  の解がただ1つのときは  $a=2\sqrt{3}$  であり、このときの解は

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

となる。

(3)

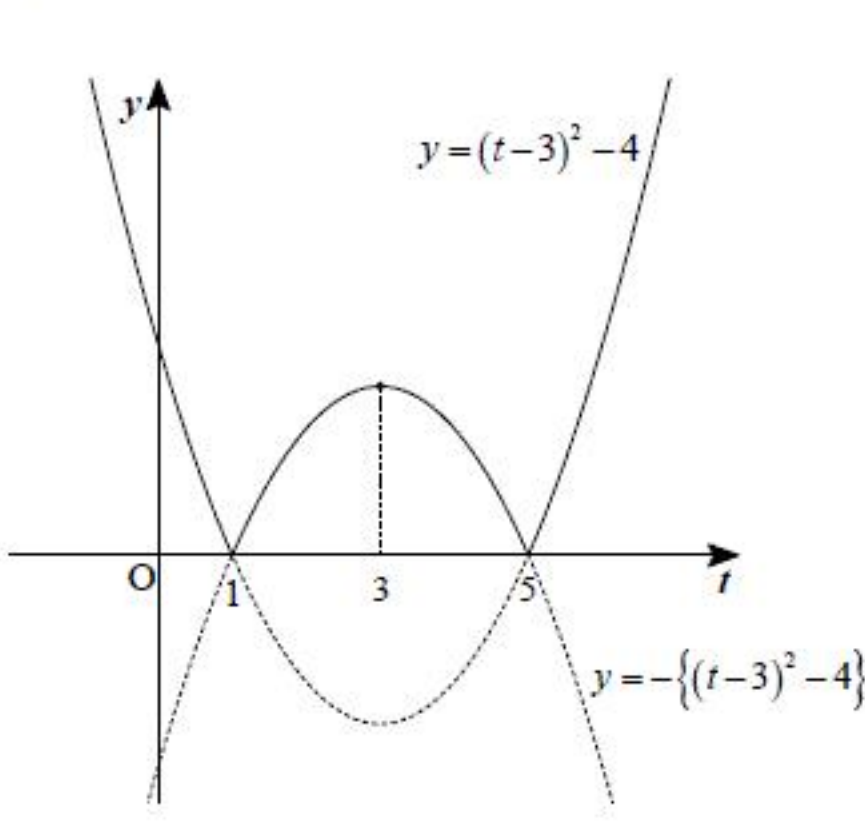
不定積分  $18 \int x^2 \log x dx$  について、部分積分法を用いることにより、積分定数を  $C$  として

$$\begin{aligned}18 \int x^2 \log x dx &= 18 \int \left( \frac{x^3}{3} \right)' \log x dx \\&= 6x^3 \log x - 6 \int x^3 (\log x)' dx \\&= 6x^3 \log x - 6 \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\&= 6x^3 \log x - 2x^3 + C\end{aligned}$$

と計算できる。

(4)

曲線  $y = |(t-3)^2 - 4|$  を図示すると、以下の図のようになる。



したがって、 $x > 0$  のとき、関数  $f(x) = 3 \int_3^{x+3} |(t-3)^2 - 4| dt$  について  $x=2$  の前後で場合分けをして考える。

[1]  $0 < x \leq 2$  のとき

$3 \leq t \leq x+3$  において  $(t-3)^2 - 4 \leq 0$  であるから、関数  $f(x)$  は

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 \int_3^{x+3} -\{(t-3)^2 - 4\} dt \\&= 3 \left[ -\frac{(t-3)^3}{3} + 4t \right]_3^{x+3} \\&= 3 \left\{ \left( -\frac{x^3}{3} + 4x + 12 \right) - 12 \right\} \\&= -x^3 + 12x\end{aligned}$$

となる。

[2]  $x > 2$  のとき

$3 \leq t \leq 5$  において  $(t-3)^2 - 4 \leq 0$  であり、 $5 \leq t \leq x+3$  において  $(t-3)^2 - 4 \geq 0$  であるから、関数  $f(x)$  は

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 \int_3^5 -\{(t-3)^2 - 4\} dt + 3 \int_5^{x+3} \{(t-3)^2 - 4\} dt \\&= 3 \left[ -\frac{(t-3)^3}{3} + 4t \right]_3^5 + 3 \left[ \frac{(t-3)^3}{3} - 4t \right]_5^{x+3} \\&= 3 \left\{ \left( -\frac{8}{3} + 20 \right) - 12 \right\} + 3 \left\{ \left( \frac{x^3}{3} - 4x - 12 \right) - \left( \frac{8}{3} - 20 \right) \right\} \\&= x^3 - 12x + 32\end{aligned}$$

となる。

(5)

与えられた数列は

$$1, /1, 5, /1, 5, 5^2, /1, 5, 5^2, 5^3, /1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, \dots$$

のように、第  $n$  群に含まれる項数が  $n$  となるように群に分けると、第  $n$  群は初項が1、公比が5、項数が  $n$  の等比数列となるような数列であると解釈できる。

(a)

第  $n$  群の第  $n$  項までに含まれる項数を  $a_n$  とすると

$$a_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

となる。ここで、 $n=8, 9$  を代入すると  $a_8=36, a_9=45$  となるから、第40項は第9群の第4項であることがわかる。したがって、第40項は  $5^3$  である。

(b)

(a)の考察より、 $n=38, 39$  を代入すると  $a_{38}=741, a_{39}=780$  となるから、第777項は第39群の第36項であることがわかる。1である項は1つの群に1つずつ含まれるから、初項から第777項までに、1である項は39個あることがわかる。

(c)

第  $n$  群の和を  $T_n$ 、第  $n$  群の第  $n$  項までの和を  $U_n$  とおくと

$$T_n = \sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{1-5^n}{1-5} = \frac{1}{4} (5^n - 1), \quad U_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

となるから、 $n$  に自然数を代入していくと、以下の表のようになる。

|                  |   |   |    |     |     |      |
|------------------|---|---|----|-----|-----|------|
| $n$              | 1 | 2 | 3  | 4   | 5   | 6    |
| $a_n$            | 1 | 3 | 6  | 10  | 15  | 21   |
| $T_n$            | 1 | 6 | 31 | 156 | 781 | 3906 |
| $U_n (=S_{a_n})$ | 1 | 7 | 38 | 194 | 975 | 4881 |

よって、 $S_{15} (=S_{a_5}) = U_5 = 975$  であることわかるから

$$S_{16} = S_{15} + 1 = 976$$

$$S_{17} = S_{15} + 1 + 5 = 981$$

$$S_{18} = S_{15} + 1 + 5 + 5^2 = 1006$$

となる。また、 $S_n$  は単調に増加するから、 $S_n \geq 1000$  を満たす最小の  $n$  は  $n=18$  であることがわかる。



(1)

$x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$  であるから,

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \end{cases}$$

となる。 $0 < \theta < 2\pi$  より  $\cos \theta \neq 1 \Leftrightarrow 1 - \cos \theta \neq 0$  であるから,  $\frac{dy}{dx}$  を  $\theta$  の関数として表すと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

(2)

点 P における曲線 C の接線の傾きは  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$  であるから,  $\frac{dy}{dx} \neq 0$ , つまり  $\theta \neq \pi$  のとき,

これに直交する法線の傾きは  $-\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$  と表せる。 $\theta = \pi$  のとき, 法線は x 軸に直交する。よ

って, 題意の法線の方程式は,  $\theta \neq \pi$  のとき,

$$\begin{aligned} y &= \left( -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot \{x - (\theta - \sin \theta)\} + 1 - \cos \theta \\ &= -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

と表せ,  $\theta = \pi$  のとき, 点 P の座標は  $(\pi, 2)$  であるから,

$$x = \pi$$

と表せる。点 Q はこの法線上の  $y$  座標が 0 の点であるから,  $\theta \neq \pi$  のとき, その  $x$  座標は,

$$\begin{aligned} -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \theta \end{aligned}$$

となる。これは  $\theta = \pi$  のときも成り立つ。線分 PQ の長さを  $\ell$  とおくと,

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{(\theta - \sin \theta - \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \end{aligned}$$

と表せるから,  $\ell$  は  $\cos \theta = -1$ , すなわち  $\theta = \pi$  のとき最大となり, このときの点 P の座標は  $P(\pi, 2)$  である。

$$(\text{答}) \quad P(\pi, 2)$$

(3)

点 P が原点を離れて再び x 軸上に戻るのは題意の円がちょうど 1 回転したときであり,  $\theta = 2\pi$ , P の  $x$  座標も  $2\pi$  となる。 $dx = (1 - \cos \theta)d\theta$  より置換積分を行うことで,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \cdot (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta - \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - 3 \cos \theta + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \right\} d\theta \\ &= \pi \left[ \theta - 3 \sin \theta + \frac{3}{2} \theta + \frac{3}{4} \sin 2\theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \left[ \frac{5}{2} \theta - 4 \sin \theta + \frac{3}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 5\pi^2 \end{aligned}$$

と  $V$  の値が計算できる。

$$(\text{答}) \quad 5\pi^2$$



(1)

 $g(x) = f(x) - x$  とおくと

$$\begin{cases} g(0) = 1 - 0 = 1 > 0 \\ g(1) = e^{-c} - 1 < 0 \quad (\because c > 0 \Rightarrow e^{-c} < e^0 = 1) \end{cases}$$

となるため、中間値の定理より、 $g(x) = 0$  は  $0 < x < 1$  に解を少なくとも1つ持つ。また、 $x > 0$  において

$$g'(x) = -ce^{-cx} - 1 < 0 \quad (\because x, c > 0)$$

となるから、 $g(x)$  は  $x > 0$  において単調減少である。よって  $g(x) = 0$  は  $0 < x < 1$  においてただ1つの解を持つから

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$$

も  $0 < x < 1$  においてただ1つの解を持つことが示された。

(証明終)

(2)

任意の  $x$  において  $f(x) > 0$  であるから、 $a_1 = 1$  より帰納的に任意の自然数  $n$  について

$$a_n > 0$$

が成り立つ。 $a_n = \alpha$  のとき、

$$a_{n+1} = f(a_n) = f(\alpha) = \alpha$$

であるから、与えられた不等式

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq c|a_n - \alpha|$$

は両辺ともに0となり成り立つ。 $a_n < \alpha$  のとき、平均値の定理より

$$\frac{f(a_n) - \alpha}{a_n - \alpha} = \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = f'(t) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる  $t$  が  $a_n < t < \alpha$  に存在する。(1)より  $0 < \alpha < 1$  であり、 $a_n > 0$  であるから

$$0 < t < 1$$

となる。ここで、

$$f'(x) = -ce^{-cx} < 0$$

$$f''(x) = c^2 e^{-cx} > 0$$

であるから、 $f'(x)$  は0を超えない単調増加関数であり、

$$f'(t) = -ce^{-ct} > -ce^{-c \cdot 0} = -c \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore -c < f'(t) < 0$$

が成り立つ。よって①より

$$-c < \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} < 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} \right| < c$$

$$\Leftrightarrow |a_{n+1} - \alpha| < c|a_n - \alpha|$$

となるから、 $a_n < \alpha$  において、与えられた不等式

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq c|a_n - \alpha|$$

は成り立つ。 $a_n > \alpha$  のときも同様に平均値の定理を用いれば

$$|a_{n+1} - \alpha| < c|a_n - \alpha|$$

となるから、 $a_n > \alpha$  においても与えられた不等式

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq c|a_n - \alpha|$$

は成り立つ。よって、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)より

$$0 \leq |a_n - \alpha| \leq c|a_{n-1} - \alpha| \leq c^{n-1}|a_1 - \alpha| = c^{n-1}|1 - \alpha|$$

$$\therefore 0 \leq |a_n - \alpha| \leq c^{n-1}|1 - \alpha| \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。②式右边について、 $0 < c < 1$  から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n-1}|1 - \alpha| = 0$$

であるから、②式についてはさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となる。よって、題意は示された。

(証明終)

(4)

$a_n \neq a_{n+1}$  のとき、(2)と同様に平均値の定理を用いれば

$$\frac{f(a_n) - f(a_{n+1})}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = f'(s) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる  $s$  が  $a_n < s < a_{n+1}$  もしくは  $a_{n+1} < s < a_n$  に存在する。ここで  $a_n, a_{n+1} > 0$  より  $s > 0$  であり、

(2)の考察より  $f'(x)$  は0を超えない単調増加関数であるから、

$$f'(s) = -ce^{-cs} > -ce^{-c \cdot 0} = -c \quad (\because s > 0)$$

$$\therefore -c < f'(s) < 0$$

となる。よって③式より

$$-c < \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} < 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} \right| < c$$

$$\Leftrightarrow |a_{n+1} - a_{n+2}| < c|a_n - a_{n+1}| \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。ここで  $a_n > 0$  であり、 $f(x)$  は単調減少な関数であるから、

$$a_{n+1} = f(a_n) < f(0) = 1$$

となり、任意の自然数  $n$  について  $0 < a_n \leq 1$  である。よって  $a_n = a_{n+1}$  のとき、(1)の結果と合わせて

$$a_{n+1} = a_n$$

$$\Leftrightarrow f(a_n) = a_n$$

$$\Leftrightarrow a_n = \alpha$$

となり、帰納的に  $N \geq n$  なる  $n$  について

$$a_n = \alpha$$

となる。よって④式と合わせて、すべての自然数  $n$  において

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| \leq c|a_n - a_{n+1}|$$

が成り立つ。これより、

$$|a_k - a_{k+1}| \leq c^{k-1}|a_1 - a_2| = c^{k-1}|1 - e^{-c}| = c^{k-1}(1 - e^{-c})$$

$$\therefore |a_k - a_{k+1}| \leq c^{k-1}(1 - e^{-c})$$

を得る。上式の辺々を  $k=1 \sim n$  まで足し合わせると

$$\sum_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{1-c^n}{1-c}(1 - e^{-c}) < \frac{1 - e^{-c}}{1-c} \quad (\because 0 < c < 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}| < \frac{1 - e^{-c}}{1-c}$$

となる。更に両辺を二倍して  $|a_1 - a_2| = 1 - e^{-c}$  を引くと

$$2 \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}| - |a_1 - a_2| < \frac{2(1 - e^{-c})}{1-c} - (1 - e^{-c})$$

$$\Leftrightarrow S_n < \frac{1+c}{1-c}(1 - e^{-c})$$

となり、題意は示された。

(証明終)