

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	
	1	2	1	2	5	2	
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	3	2	1	2	1	2	1
(3)	セ	ソ					
	1	0					

【解説】

(1)

$\frac{2x-5}{4x^2-1} > 0$ を満たす実数 x の値の範囲は

$$\frac{2x-5}{4x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 > 0 \\ 4x^2-1 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ 4x^2-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \frac{5}{2} < x$$

である。

(2)

分母の符号で場合分けをする。

[1] $4x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x$ のとき

$$\frac{2x-5}{4x^2-1} > -1$$

$$\Leftrightarrow 2x-5 > -(4x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x-6 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{3}{2}, 1 < x$$

となり、 $x < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x$ より、

$$x < -\frac{3}{2}, 1 < x$$

である。

[2] $4x^2-1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{2x-5}{4x^2-1} > -1$$

$$\Leftrightarrow 2x-5 < -(4x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+2x-6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2x+3)(x-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < 1$$

となり、 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ より、

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

である。

以上[1],[2]より、求める実数 x の値の範囲は

$$x < -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, 1 < x$$

である。

(3)

$\frac{2^{x+1}-5}{4^{x+1}-1} > -1$ について、 $2^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、

$$\frac{2t-5}{4t^2-1} > -1$$

となる。したがって、(2)の結果と $t > 0$ より、

$$0 < t < \frac{1}{2}, 1 < t$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2^x < \frac{1}{2}, 1 < 2^x$$

$$\therefore x < -1, 0 < x$$

である。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	4	3	5	4	5
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	9	4	5	3	5

〔解説〕

(1)

辺 QR の中点を M, 円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とする。△ O_1QM について, 三平方の定理より

$$1^2 + (1 - r_1)^2 = (1 + r_1)^2$$

$$\therefore r_1 = \frac{1}{4}$$

が成り立つ。したがって,

$$\sin \theta_1 = \frac{O_1M}{QO_1}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{QM}{QO_1}$$

$$= \frac{4}{5}$$

である。

(2)

点 O_2 から辺 QR への垂線の足を N とする。QN = x とすると, △ O_2QN について, 三平方の定理より

$$x^2 + (1 - r_2)^2 = (1 + r_2)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, 点 O_2 から直線 O_1M への垂線の足を T とするとき, △ O_1O_2T について三平方の定理より

$$(1 - x)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$\therefore r_2 = (1 - x)^2$$

が成り立つ。これを①へ代入すると

$$x^2 + (2x - x^2)^2 = (2 - 2x + x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(3x - 2) = 0$$

と変形できる。 $0 < x < 1$ より, これを解いて $x = \frac{2}{3}$ である。よって,

$$r_2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}$$

と計算できる。また,

$$\sin \theta_2 = \frac{O_2N}{QO_2}$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{QN}{QO_2}$$

$$= \frac{3}{5}$$

である。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	2	5	2	1	0	1	0
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ		
	3	2	3	2	3		

〔解説〕

(1)

$\angle AOP = \frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\angle BOP = \pi - \angle AOP = \frac{\pi}{2}$$

となる。よって三平方の定理より

$$\begin{cases} AP = \sqrt{OA^2 + OP^2} = \sqrt{2} \\ BP = \sqrt{OB^2 + OP^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore AP + BP = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。また、 $\triangle APB$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot BP} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\angle AOP = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと、 $\triangle AOP$ について余弦定理より

$$AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cdot \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta}$$

となる。同様にして $\triangle BOP$ について余弦定理より

$$BP = \sqrt{OB^2 + OP^2 - 2 \cdot OB \cdot OP \cdot \cos(\pi - \theta)} = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \theta}$$

となる。よって $AP + BP = L(\theta) (0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと

$$L(\theta) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} + \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \theta}$$

となる。ここで $0 < \theta < \pi$ において

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1 - \cos \theta}} + \frac{-\sin \theta}{2\sqrt{\frac{5}{4} + \cos \theta}} \\ &= \sin \theta \left\{ \frac{\sqrt{5 + 4\cos \theta} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)(5 + 4\cos \theta)}} \right\} \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{5 + 4\cos \theta} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} &= 0 \quad (\because 0 < \theta < \pi) \\ \Leftrightarrow \sqrt{5 + 4\cos \theta} &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

であるので、両辺を二乗して

$$\begin{aligned} 5 + 4\cos \theta &= 2 - 2\cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 < \theta < \pi)$$

となる。よって $L(\theta)$ の増減は下のようになる。

θ	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$L'(\theta)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$L(\theta)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$

よって $AP + BP = L(\theta)$ の最小値は $\frac{3}{2}$ 、最大値は $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ である。

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ			
	1	4	1	4	3			
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	1	2	1	3	1	2	1	3
(3)	セ	ソ	タ					
	3	2	3					

[解説]

(1)

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= a_{n+1} + ib_{n+1} \\
 &= \frac{1}{4}a_n - \frac{\sqrt{3}}{4}b_n + i\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)a_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)ib_n \\
 &= \alpha z_n \\
 &= \alpha a_n + \alpha ib_n
 \end{aligned}$$

となるから,

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}i$$

となる。

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}
 z_n &= \alpha^{n-1}z_1 \\
 &= \alpha^{n-1}(a_1 + ib_1) \\
 &= \alpha^{n-1}(1 + \sqrt{3}i) \\
 &= 4\alpha^n
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから,

$$\alpha^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

となるので,

$$\begin{aligned}
 z_n &= 4 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right\} \\
 \Leftrightarrow a_n + ib_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)
 \end{aligned}$$

となる。定義より a_n, b_n は明らかに実数であるから、上式より

$$\begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \end{cases}$$

となる。

(3)

(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned}
 L_n &= |z_{n+1} - z_n| \\
 &= |(\alpha - 1)z_n| \\
 &= \left| -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \sqrt{3}$$

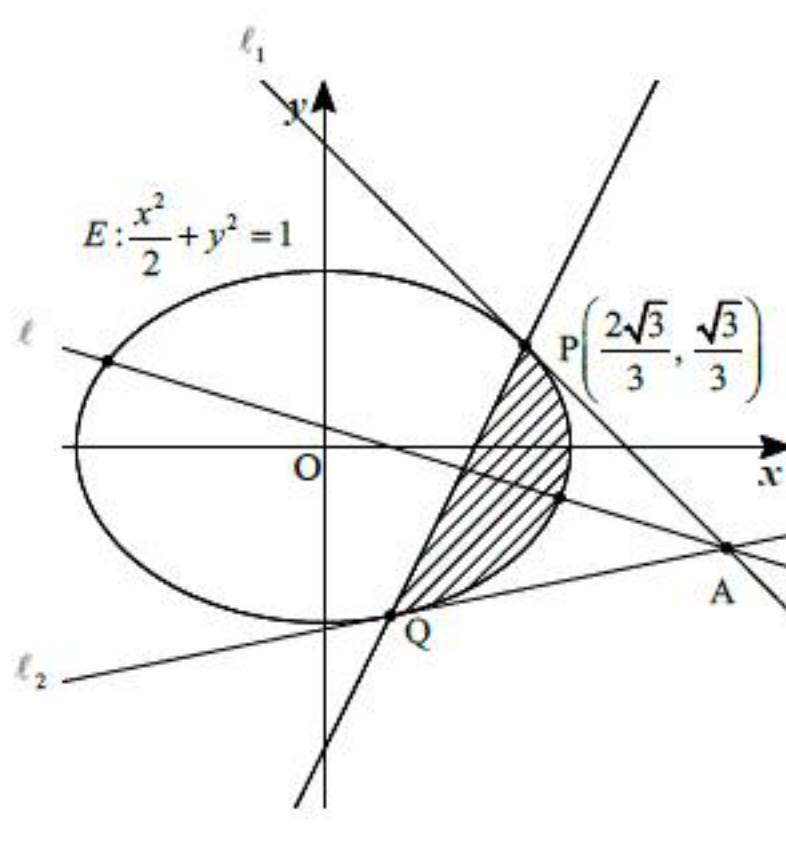
となる。また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

となる。

5

(1)



楕円 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ の方程式を x で微分して整理すると、 $y > 0$ のとき

$$x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

となるから、楕円 E 上の点 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における接線 ℓ_1 の傾きは

$$-\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = -1$$

であることがわかる。

(答) -1

(2)

(1)の結果より、接線 ℓ_1 の方程式は

$$y = -\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{3}$$

となるから、直線 ℓ_1 上の点で x 座標が $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ である点 A の座標は

$$\begin{cases} y = -x + \sqrt{3} \\ x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

と求まる。

(答) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3)

点 A を通り、傾きが m である直線を ℓ とする。このとき、直線 ℓ の方程式は

$$y = m\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

であるから、楕円 E の方程式と連立して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + \left\{m\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + m^2\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}m\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{3} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(m^2 + \frac{1}{2}\right)x^2 - 2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right)x + \left(\frac{16}{3}m^2 + \frac{8}{3}m - \frac{2}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} \geq 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 - \left(m^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{3}m^2 + \frac{8}{3}m - \frac{2}{3}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(5m^2 + 4m - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (5m - 1)(m + 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となるから、 m がこの条件を満たすとき、直線 ℓ と楕円 E は共有点をもち、その共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 - \left(m^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{3}m^2 + \frac{8}{3}m - \frac{2}{3}\right)}}{m^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m \pm \sqrt{-\frac{1}{3}(5m^2 + 4m - 1)}}{m^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4m^2 + m \pm \sqrt{-5m^2 - 4m + 1}}{\sqrt{3}\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{4m^2 + m \pm \sqrt{-5m^2 - 4m + 1}}{\sqrt{3}\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)}$

(4)

直線 ℓ が楕円 E と接するのは、これらの共有点がただ1つとなるときである。ここで、(3)の結果より、共有点がただ1つとなるのは

$$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -1, \frac{1}{5}$$

のときであることがわかるから、 ℓ_2 の傾きは $\frac{1}{5}$ と求まる。

(答) $\frac{1}{5}$

(5)

直線 ℓ_2 の方程式は

$$y = \frac{1}{5}\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

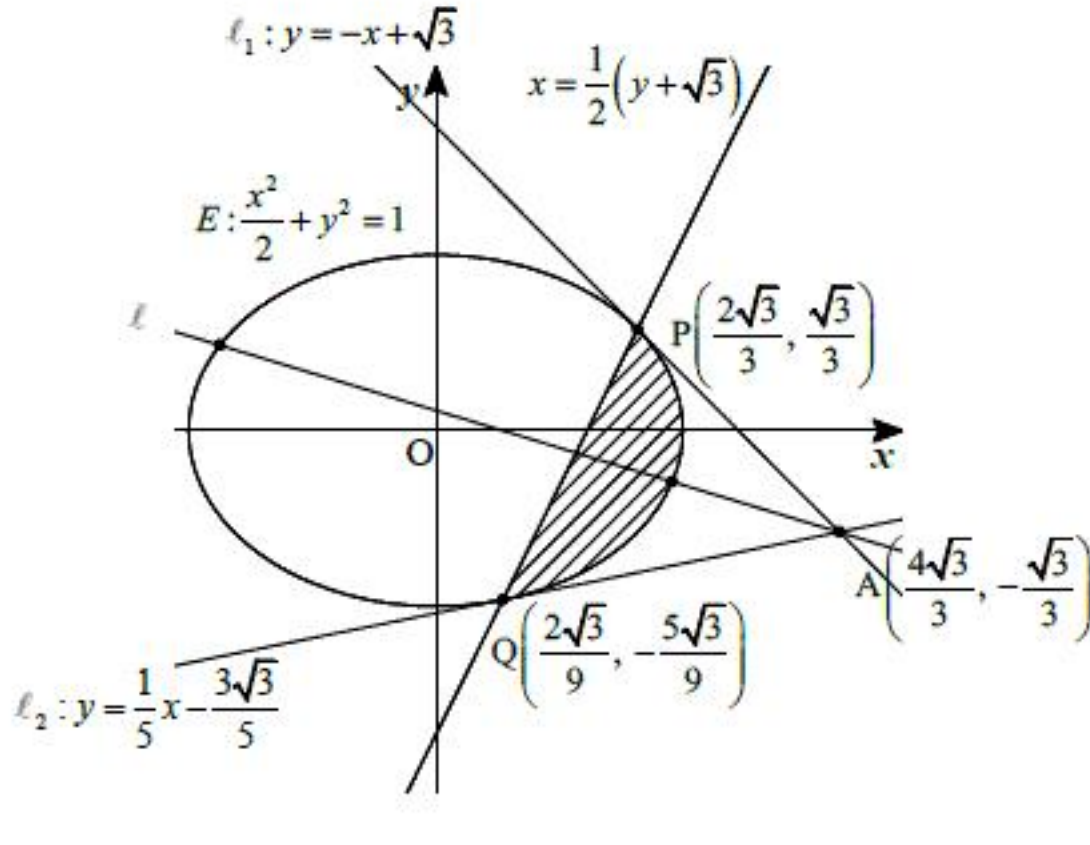
であり、(3)の結果より、点 Q の座標は

$$\begin{cases} x = \frac{4\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \pm \sqrt{-5\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 1}}{\sqrt{3}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\right\}} \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$$

と求まる。

(答) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$

(6)



三角形 PAQ の内部と楕円 E の内部の共通部分の領域を y 軸周りに1回転してできる回転体

の体積を V とすると、楕円では $x^2 = 2(1 - y^2)$ となることから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^2 dy - \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left\{ \frac{1}{2}(y + \sqrt{3}) \right\}^2 dy \\ &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left\{ 2(1 - y^2) - \frac{1}{4}(y + \sqrt{3})^2 \right\} dy \\ &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left\{ \frac{9}{4} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(y + \frac{5\sqrt{3}}{9} \right) \right\} dy \\ &= \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 \\ &= \frac{64\sqrt{3}}{81} \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{64\sqrt{3}}{81} \pi$