

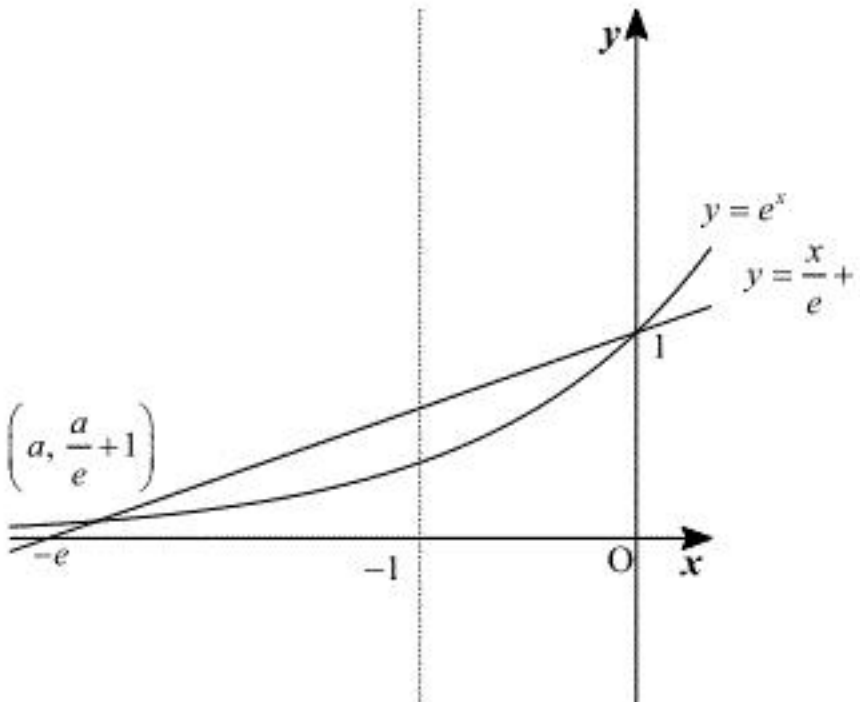
【解答】

(1)	(a)	ア	イ	(b)	ウ	(c)	エ	オ	(d)	カ	キ
	－	5	3	＋	1	－	5	3	＋	1	3
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	(e)	ノ	ハ		
	2	1	2	1	2	2	－	1	4		
(3)	(f)	ヒ	フ	(g)	ヘ	(h)	ホ	マ	ミ	ム	
	－	1	2	＋	1	－	1	1	1	0	

【解説】

- (1)
- 与えられた方程式，
- $$x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0 \qquad \cdots \text{①}$$
- の判別式を D とおくと，方程式①が実数解をもつような a の値の範囲は，
- $$D \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow (a+1)^2-4(a^2+a-1) \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow 3a^2+2a-5 \leq 0$$
- $$\Leftrightarrow (a-1)(3a+5) \leq 0$$
- $$\therefore -\frac{5}{3} \leq a \leq 1 \qquad \cdots \text{②}$$
- と求めることができる．また，方程式①は，
- $$a^2+(x+1)a+x^2+x-1=0$$
- と変形することで a の 2 次方程式と見なすことができる．よって方程式①は a, x の対称式であり， x の値の範囲も
- $$-\frac{5}{3} \leq x \leq 1 \qquad \cdots \text{③}$$
- と定まる．②より a の整数解として存在し得るものは $a=-1, 0, 1$ であるから，これらそれぞれについて③を満たす整数解 x を求めればよい． $a=-1$ のとき，
- $$x^2-1=0 \therefore x=\pm 1$$
- となり，これらはともに条件を満たす．また， $a=0$ のとき，
- $$x^2+x-1=0 \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
- より条件を満たす整数解 x は存在しない．また， $a=1$ のとき，
- $$x^2+2x+1=0 \therefore x=-1$$
- となり，これは条件を満たす．以上より，方程式①を満たす整数の組 (a, x) は，
- $$(a, x)=(-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$$
- の 3 個である．

- (2)
- 放物線 C の方程式について，
- $$y'=2x$$
- が成り立つので，
- $$\begin{aligned} \ell: y &= 2a(x-a)+a^2=2ax-a^2 \\ m: y &= 2b(x-b)+b^2=2bx-b^2 \\ n: y &= 2c(x-c)+c^2=2cx-c^2 \end{aligned}$$
- である．直線 ℓ, m の交点 R の x 座標は，これらの方程式から y を消去することで，
- $$\begin{aligned} 2ax-a^2 &= 2bx-b^2 \\ \Leftrightarrow 2(a-b)x &= (a-b)(a+b) \\ \therefore x &= \frac{a+b}{2} \ (\because a \neq b) \end{aligned}$$
- と分かるので，
- $$y=2a \cdot \frac{a+b}{2}-a^2=ab$$
- となる．従って， $R\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, ab\right)$ と分かるので，点 R を通り直線 PQ ，すなわち直線 n に垂直な直線の方程式は
- $$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+2c(y-ab)=0$$
- $$\therefore x+2cy=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+2abc \qquad \cdots \text{④}$$
- となる．同様に，点 Q から直線 PR ，すなわち直線 m に垂直な直線の方程式は
- $$x+2by=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+2abc \qquad \cdots \text{⑤}$$
- と求められる．また， $\triangle PQR$ の垂心は④，⑤の交点であるから，その y 座標は④，⑤から x を消去することで，
- $$\begin{aligned} 2(c-b)y &= \frac{b-c}{2} \\ \therefore y &= -\frac{1}{4} \ (\because b \neq c) \end{aligned}$$
- と求めることができる．

- (3)
- 
- $g(x)=e^x-\frac{x}{e}-1$ とおくと，
- $$g'(x)=e^x-\frac{1}{e}$$
- より $x>0$ において $g(x)$ は単調増加であり，
- $$g(0)=0$$
- より $x>0$ において常に
- $$e^x>\frac{x}{e}+1$$
- が成り立つ．従って，方程式 $e^x=\frac{x}{e}+1$ の 0 でない実数解 a について，
- $$a<0$$
- を得る．また，
- $$g(-1)=\frac{2}{e}-1<0 \ (\because 2<e<3)$$
- より，グラフから $a<-1$ であることが分かる．ここで，求める面積 S は上図より，
- $$\begin{aligned} S &= \int_a^0 \left(\frac{x}{e}+1-e^x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2e}+x-e^x \right]_a^0 \\ &= -1-\frac{a^2}{2e}-a+e^a \\ &= -1-\frac{a^2}{2e}-a+\left(\frac{a}{e}+1 \right) \left(\because e^a=\frac{a}{e}+1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{e}+\frac{a}{e}-a \end{aligned}$$
- と計算できる．また，
- $$\begin{aligned} \int_{-1}^0 e^x dx &= \left[e^x \right]_{-1}^0 \\ &= 1-\frac{1}{e} \end{aligned}$$
- である．ここで，直線 $y=\frac{x}{e}+1$ ， x 軸， y 軸で囲まれた三角形の面積を S_1 ，直線 $x=-1, x=0$ ， x 軸，曲線 $y=e^x$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，
- $$\begin{aligned} S &< S_1-S_2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot |-e| \cdot 1 - \int_{-1}^0 e^x dx \\ &= \frac{e}{2} - \left(1-\frac{1}{e} \right) \\ &< \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} \ (\because 2<e<3) \\ &= 1 \\ \therefore 0 &< S < 1 \end{aligned}$$
- が成り立つことが分かる．

2

(1)

与えられた方程式を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x \cos a \cos b + \cos^2 a &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \cos a \cos b \pm \sqrt{\cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a} \\
 \Leftrightarrow x &= \cos a \cos b \pm \cos a \sqrt{\cos^2 b - 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \cos a \cos b \pm \cos a \sqrt{-\sin^2 b} \\
 \Leftrightarrow x &= \cos a \cos b \pm i \cos a \sin b \\
 \Leftrightarrow x &= \cos a (\cos b \pm i \sin b) \\
 \therefore x &= \cos a \{ \cos(\pm b) + i \sin(\pm b) \} \quad (\text{複号同順})
 \end{aligned}$$

である。 $\cos a > 0$ より、これは極形式である。

$$(\text{答}) \quad x = \cos a \{ \cos(\pm b) + i \sin(\pm b) \} \quad (\text{複号同順})$$

(2)

与えられた方程式を解くと、

$$\begin{aligned}
 x^2 \cos^2 a - 2x \cos a \cos b + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\cos a \cos b \pm \sqrt{\cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a}}{\cos^2 a} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\cos b \pm \sqrt{\cos^2 b - 1}}{\cos a} \quad (\because \cos a \neq 0) \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\cos b \pm \sqrt{-\sin^2 b}}{\cos a} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\cos a} (\cos b \pm i \sin b) \\
 \therefore x &= \frac{1}{\cos a} \{ \cos(\pm b) + i \sin(\pm b) \} \quad (\text{複号同順})
 \end{aligned}$$

である。 $\frac{1}{\cos a} > 0$ より、これは極形式である。

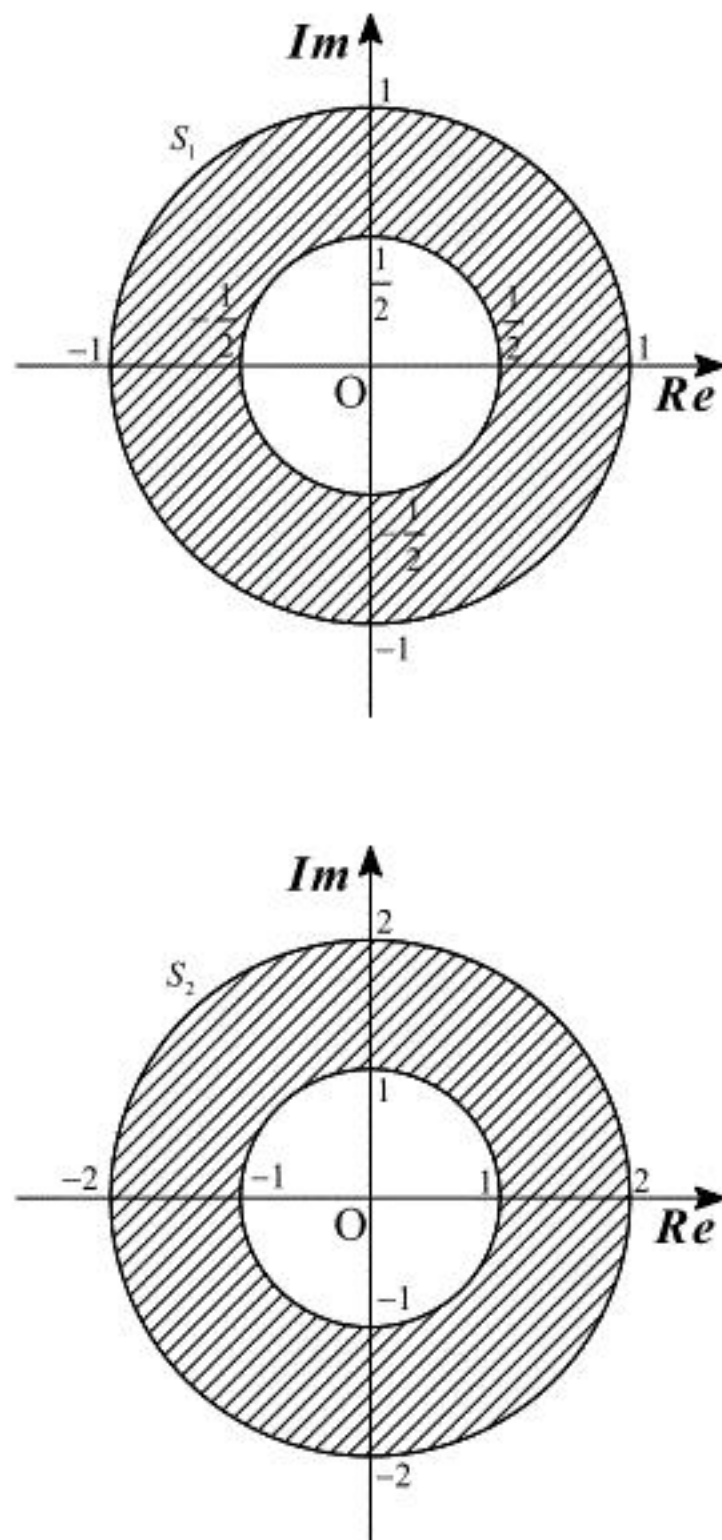
$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{\cos a} \{ \cos(\pm b) + i \sin(\pm b) \} \quad (\text{複号同順})$$

(3)

$$-\frac{\pi}{3} \leq a \leq \frac{\pi}{3} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos a \leq 1, 1 \leq \frac{1}{\cos a} \leq 2$$

が成り立つ。また、 $0 \leq b < 2\pi$ より、 $\cos(\pm b) + i \sin(\pm b)$ がとり得る値全体の集合は複素数平面上で原点を中心とする半径1の円となる。従って、 a, b が与えられた範囲を動くとき、領域 S_1, S_2 はそれぞれ以下の斜線部ようになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(4)

2つの複素数 α, β がそれぞれ S_1, S_2 上を動くとき、実数 a, b, c, d を用いて

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cos a (\cos b + i \sin b) \\
 \beta &= \frac{1}{\cos c} (\cos d + i \sin d)
 \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、 a, b, c, d は

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{3} &\leq a, c \leq \frac{\pi}{3} \\
 0 &\leq b, d < 2\pi
 \end{aligned}$$

をそれぞれ満たす。このとき、

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta &= \frac{\cos a}{\cos c} (\cos b + i \sin b) (\cos d + i \sin d) \\
 &= \frac{\cos a}{\cos c} \{ \cos(b+d) + i \sin(b+d) \}
 \end{aligned}$$

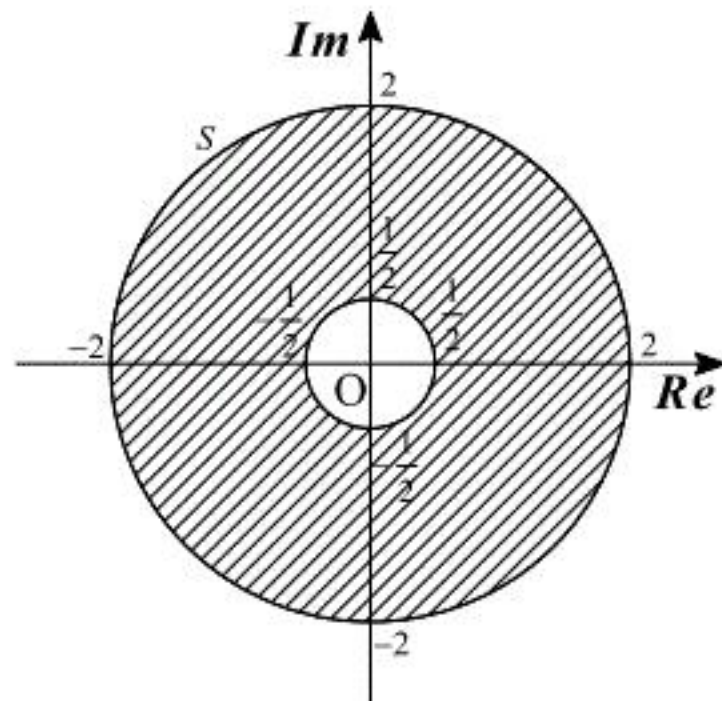
と変形できる。ここで、

$$\frac{1}{2} \leq \cos a, \cos c \leq 1$$

より、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\cos a}{\cos c} \leq 2, 0 \leq b+d < 4\pi$$

となる。従って、 $\cos(b+d) + i \sin(b+d)$ がとり得る値全体の集合は複素数平面上で原点を中心とする半径1の円となるので、 $\alpha\beta$ が取り得る値全体の集合 S は以下ようになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

3

(1)

$f(x) = \sin(\pi \cos x)$ より, 求める値は,

$$\begin{aligned} f(\pi+x) - f(\pi-x) &= \sin\{\pi \cos(\pi+x)\} - \sin\{\pi \cos(\pi-x)\} \\ &= \sin(-\pi \cos x) - \sin(-\pi \cos x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) 0

(2)

(1)の結果より,

$$f(\pi+x) = f(\pi-x)$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは $x = \pi$ について線対称である。 $0 \leq x \leq \pi$ において,

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\therefore -\pi \leq \pi \cos x \leq \pi$$

が成り立つので, $f(x) = 0$ となるのは

$$\pi \cos x = -\pi, 0, \pi$$

$$\therefore x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

のときである。対称性より, $0 \leq x \leq 2\pi$ において $f(x) = 0$ を満たす x の値は,

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

と求めることができる。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

(3)

$f(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\pi \cos x)' \cos(\pi \cos x) \\ &= -\pi \sin x \cos(\pi \cos x) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \pi$ において, $\sin x = 0$ となるのは

$$x = 0, \pi$$

のときである。また, (2)より, $0 \leq x \leq \pi$ における $\pi \cos x$ の値域は,

$$-\pi \leq \pi \cos x \leq \pi$$

であるから, $\cos(\pi \cos x) = 0$ となるのは

$$\pi \cos x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

のときである。対称性より, $0 \leq x \leq 2\pi$ において $f'(x) = 0$ を満たす x の値は,

$$x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$$

と求めることができる。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

(4)

$f(x) = \sin(\pi \cos x)$ より, 求める値は,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin\left\{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\} + \sin\left\{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} \\ &= \sin(-\pi \sin x) + \sin(\pi \sin x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) 0

(5)

(4)の結果より $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0$ が成り立つから, $y = f(x)$ のグラフは点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ について点対称である。 よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x)| dx$$

が成り立つ。 また, $y = f(x)$ のグラフは $x = \pi$ について線対称であるから,

$$\int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)| dx$$

が成り立つ。 よって求める値は,

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{2\pi} |f(x)| dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx} &= \frac{2 \int_0^{\pi} |f(x)| dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx} \\ &= \frac{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx} \\ &= 4 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) 4