

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ						
	1	2	3	4						
(2)	オ	カ	キ	ク						
	1	2	1	2						
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	(a)	(b)	(c)	(d)
	1	1	2	1	2	1	-	+	-	+
(4)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	(e)	(f)		
	2	3	1	3	1	2	+	-		
(5)	ナ	ニ	ヌ	ネ						
	1	2	3	4						

【解説】

(1)

硬貨を1回投げたときに点Pの座標が1であるということは、1回目に表が出るということであるから、この確率 p_1 は、

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

である。また、硬貨を2回投げたとき、1回目または2回目の時点で点Pの座標が2であるということは、

- ・1回目と2回目の両方で表が出る
- ・1回目に裏が出る(2回目の結果には依らない)

のいずれかであるから、この確率 p_2 は、

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

である。

(2)

硬貨を $n+2$ 回投げたとき、1回目から $n+2$ 回目までのいずれかの時点で点Pの座標が $n+2$ となるということは、

- ・1回目に表が出て1だけ進み、かつそれ以降の $n+1$ 回の試行のいずれかの時点まででちょうど $n+1$ だけ進んでいる
- ・1回目に裏が出て2だけ進み、かつそれ以降の n 回の試行のいずれかの時点まででちょうど n だけ進んでいる

のいずれかであり、かつこれらは互いに排反である。これより、

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

(3)

①の特性方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

と解くことができる。したがって、①は、

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \\ \Leftrightarrow p_{n+2} - p_{n+1} &= -\frac{1}{2} (p_{n+1} - p_n) \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$a_n = p_{n+1} - p_n$$

とおけば、数列 $\{a_n\}$ は初項 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となる。また、①は、

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \\ \Leftrightarrow p_{n+2} + \frac{1}{2} p_{n+1} &= p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \end{aligned}$$

とも変形できるから、

$$b_n = p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n$$

とおけば、数列 $\{b_n\}$ は初項 $p_2 + \frac{1}{2} p_1 = 1$ 、公比1の等比数列となる。

(4)

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の一般項を考えることで、

$$\begin{cases} p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n = 1 \end{cases}$$

をそれぞれ得る。これらの差をとることで、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} p_n &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \therefore p_n &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

と求めることができる。

(5)

(4)より、 p_n が最小、最大となるような n は、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ が最小、最大となるような n である。ここ

で、 k を自然数とすると、 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ であることから、

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^1 < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \cdots < \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} < \cdots < 0 < \cdots < \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2} < \cdots < \left(-\frac{1}{2}\right)^4 < \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

が成り立つ。よって $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は、

$$\begin{aligned} n=1 \text{で最小値: } &\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} \\ n=2 \text{で最大値: } &\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

をそれぞれとることが分かる。したがって、 p_n は、

$$\begin{aligned} n=1 \text{で最小値: } &p_1 = \frac{1}{2} \\ n=2 \text{で最大値: } &p_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

をとる。

2

(1)

$f(x)=0$ が重解を持つとき、その重解を $x=t_1$ 、もう一方の解を $x=t_2$ とする(3重解の場合は $t_1=t_2$)と、

$$f(x)=(x-t_1)^2(x-t_2)$$

と変形できる。よって、解と係数の関係より、

$$2t_1+t_2=-1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2t_1t_2+t_1^2=a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$t_1^2t_2=-3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。①より、 $t_2=-1-2t_1$ となり、これを③に代入すると、

$$t_1^2(-1-2t_1)=-3$$

$$\Leftrightarrow 2t_1^3+t_1^2-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t_1-1)(2t_1^2+3t_1+3)=0$$

となるが、

$$2t_1^2+3t_1+3=2\left(t_1+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

であるから、 $t_1=1$ となる。これを①、②に代入すると、

$$t_2=-1-2\cdot 1=-3$$

$$a=2\cdot 1\cdot (-3)+1^2=-5$$

となる。これより、 $f(x)=0$ の解は $x=-3, 1$ である。

(答) $a=-5$, $x=-3, 1$

(2)

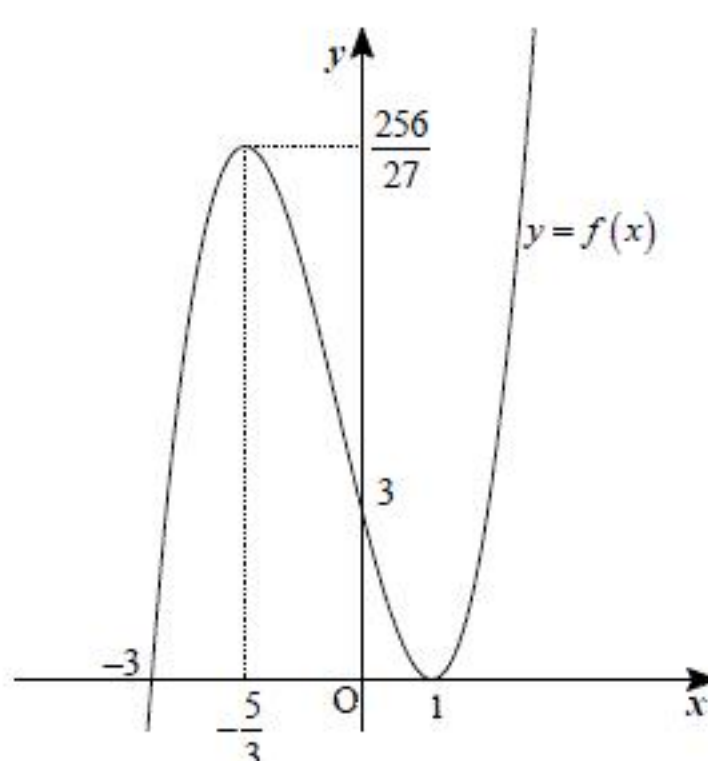
$$f(x)=x^3+x^2-5x+3$$

$$f'(x)=3x^2+2x-5=(x-1)(3x+5)$$

より、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより、 $y=f(x)$ の概形は以下のようになる。



(答) 上図

(3)

(2)より、 $k>0$ においては、 $x>0$ に2つ、 $x<0$ に1つの共有点があることが分かる。また、 $k=0$ においては、 $x=-3, 1$ の2つの共有点があることが分かる。 $k<0$ においては、 $x>0$ には共有点はなく、 $x<0$ に1つの共有点があることが分かる。以上より、 $k<0$ で共有点が1つになる。

(答) $k<0$

(3) [別解]

直線 $y=kx$ と $y=f(x)$ のグラフの共有点の x 座標は、方程式

$$kx=x^3+x^2-5x+3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

の実数解である。条件より、④はただ1つの実数解をもつ。④は $x=0$ では成り立たないから、両辺を x で割って、

$$k=x^2+x-5+\frac{3}{x}$$

となる。よって、④の実数解は、直線 $y=k$ と曲線 $y=x^2+x-5+\frac{3}{x}$ の共有点の x 座標である。

$y=x^2+x-5+\frac{3}{x}$ について、

$$\begin{aligned} y' &= 2x+1-\frac{3}{x^2} \\ &= \frac{2x^3+x^2-3}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{x^2} \end{aligned}$$

となり、

$$2x^2+3x+3=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

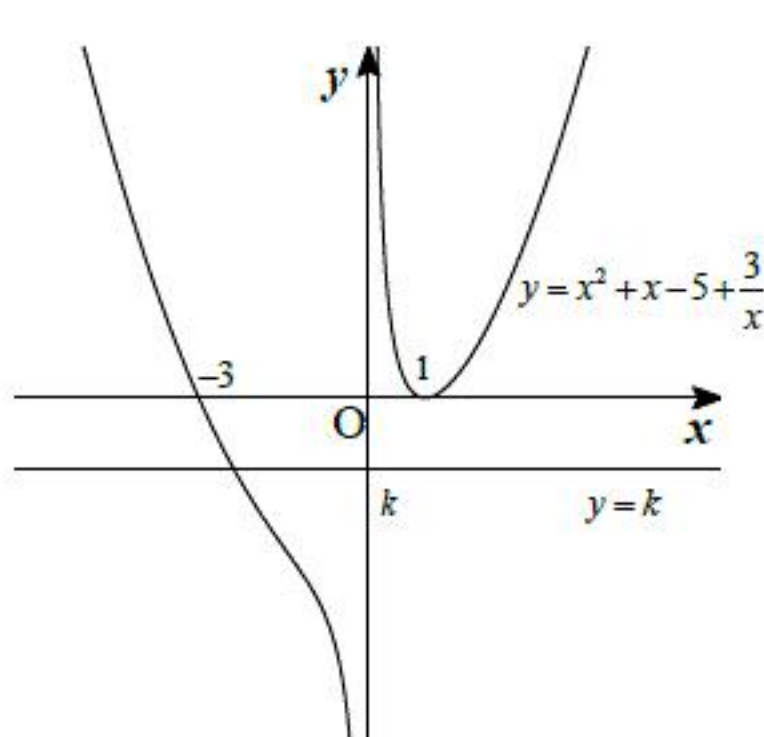
であるから、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	-	$\nearrow$	-	0	+
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

より、グラフは以下のようになる。



したがって、求める k の値の範囲は

$$k<0$$

である。

(答) $k<0$

(4)

(3)より、

$$\begin{cases} y=kx \\ y=x^3+x^2-5x+3 \end{cases}$$

が共有点を1つもつ条件は $k<0$ であるから、

$$x^3+x^2-(5+k)x+3=0$$

が実数解を1つもつ条件は $k<0$ である。これより、 $f(x)=x^3+x^2+ax+3=0$ が実数解を1つもつ条件は

$$a=-(5+k)>-5$$

となる。

(答) $a>-5$

(5)

$k<0$ において、 $y=x^3+x^2-5x+3$ と $y=kx$ の共有点の x 座標のとり得る値の範囲は

$$-3<x<0$$

である。よって、 $a>-5$ における方程式 $f(x)=x^3+x^2+ax+3=0$ の解のとり得る値の範囲は

$$-3<x<0$$

となる。

(答) $-3<x<0$