

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	2	1	9	1	7	2	9	4	0	6	3	5	2	2	3	7
(2)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ							
	2	4	4	2	2	1	4	6	6							
(3)	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ				
	1	2	4	7	8	9	1	2	1	6	1	3				

【解説】

(1)

$$a_{n+1}=2a_n+9^n$$

の両辺を 9^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{9^{n+1}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{a_n}{9^n}+\frac{1}{9}$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{2b_n+1}{9}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。この特性方程式を考えると、

$$\alpha=\frac{2\alpha+1}{9}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{7}$$

であるから、 $c_n=b_n-\frac{1}{7}$ とおくことで、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned}b_{n+1}-\frac{1}{7}&=\frac{2}{9}\left(b_n-\frac{1}{7}\right)\\ \therefore c_{n+1}&=\frac{2}{9}c_n\end{aligned}$$

を得る。以上から、数列 $\{c_n\}$ は、初項が、

$$c_1=b_1-\frac{1}{7}=\frac{a_1}{9}-\frac{1}{7}=\frac{7}{9}-\frac{1}{7}=\frac{40}{63}$$

であり、公比 $\frac{2}{9}$ の等比数列である。これより、

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{40}{63}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}=\frac{20}{7}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\\ b_n=c_n+\frac{1}{7}&=\frac{20}{7}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n+\frac{1}{7}\\ a_n=9^n\cdot b_n&=\frac{20\cdot2^n+9^n}{7}=\frac{5\cdot2^{n+2}+3^{2n}}{7}\end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)

(a)

全ての実数 α に対して、

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\frac{\pi}{6}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{5}{12}\pi\leq\alpha+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi$ であるから、 $\textcircled{1}$ が最大になるのは、

$$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

のときであり、その最大値は、

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ が最小値をとるのは、

$$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$

のときであり、その最小値は、

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

である。

(b)

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\cos\beta\\&=2\cos\beta(\sin\alpha+\cos\alpha)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\frac{\pi}{6}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ のとき、(a)より、

$$1\leq\sin\alpha+\cos\alpha\leq\sqrt{2}$$

であり、 $\frac{\pi}{6}\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき、

$$0\leq\cos\beta\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。これより与式が最大となるのは、

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\cos\alpha&=\sqrt{2}\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}\\\cos\beta&=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore\beta=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

のときであり、そのとき最大値

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

をとる。

(3)

(a)

さいころの目の出方の総数は、

$$6^3=216\text{通り}$$

である。 abc が素数になるのは、1が2回出て、かつ2,3,5のいずれかが1回出るときである。

そのような目の出方は、

$$3\cdot{}_3\text{C}_1=9\text{通り}$$

存在するので、求める確率は、

$$\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$$

である。

(b)

abc が2の倍数とならないということは、3回とも2の倍数以外が出るということである。そ

のような目の出方は、

$$3^3=27\text{通り}$$

存在するので、 abc が2の倍数になる確率は、

$$1-\frac{27}{216}=\frac{7}{8}$$

と求められる。次に、 abc が5の倍数とならないということは、3回とも5以外の数が出るこ

うことである。そのような目の出方は、

$$5^3=125\text{通り}$$

存在するので、 abc が5の倍数になる確率は、

$$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

と求められる。最後に、 abc が10の倍数とならないような目の出方の総数は、 abc が2の倍数

とならないような目の出方の総数(27通り)と、 abc が5の倍数とならないような目の出方の

総数(125通り)の和から、3回とも2の倍数と5以外の数(1または3)が出るような目の出方の

総数を引いたものである。従って、 abc が10の倍数とならないような目の出方の総数は、

$$27+125-2^3=144\text{通り}$$

存在するので、 abc が10の倍数となる確率は、

$$1-\frac{144}{216}=\frac{1}{3}$$

と求めることができる。

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = -t\vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} - t(\vec{b} - \vec{a}) = (1+t)\vec{a} - t\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{BP} = -t\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{OQ} = (1+t)\vec{a} - t\vec{b}$$

(2)

k の定義より $\overrightarrow{OR}$ は,

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{BP} = \vec{b} + k(-t\vec{a} - \vec{b}) = -kt\vec{a} + (1-k)\vec{b}$$

と表され, ℓ の定義より $\overrightarrow{OR}$ は,

$$\overrightarrow{OR} = -\ell\overrightarrow{OQ} = -\ell(1+t)\vec{a} + \ell t\vec{b}$$

とも表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから,

$$-kt = -\ell(1+t) \quad \dots\dots ①$$

$$1-k = \ell t \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ。②より $k = 1 - \ell t$ となるので, これを①に代入することで,

$$-(1-\ell t)t = -\ell(1+t)$$

$$\therefore \ell = \frac{t}{t^2 + t + 1}$$

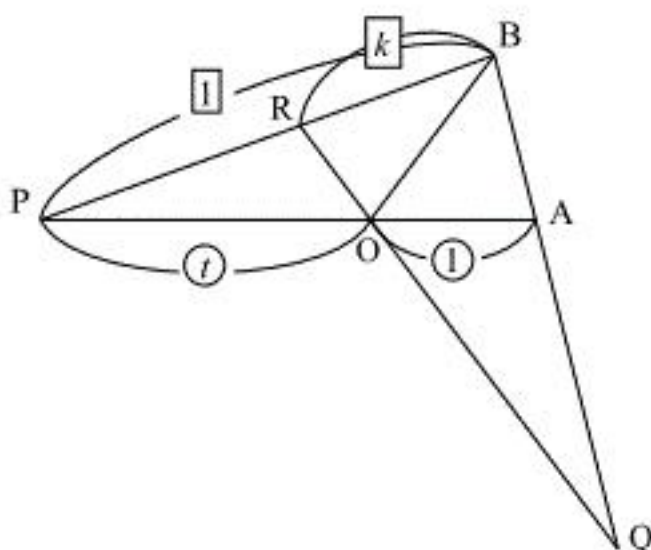
を得る。したがって

$$k = 1 - \ell t = \frac{t+1}{t^2 + t + 1}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{t+1}{t^2 + t + 1}, \ell = \frac{t}{t^2 + t + 1}$$

(3)



各三角形の面積について,

$$\triangle OAB : \triangle OPB = OA : OP = 1 : t$$

$$\triangle OPB : \triangle OBR = BP : BR = 1 : k = 1 : \frac{t+1}{t^2 + t + 1}$$

$$\therefore \triangle OAB : \triangle OBR = 1 : \frac{t^2 + t}{t^2 + t + 1}$$

が成り立つので,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{t^2 + t}{t^2 + t + 1}$$

を得る。これより,

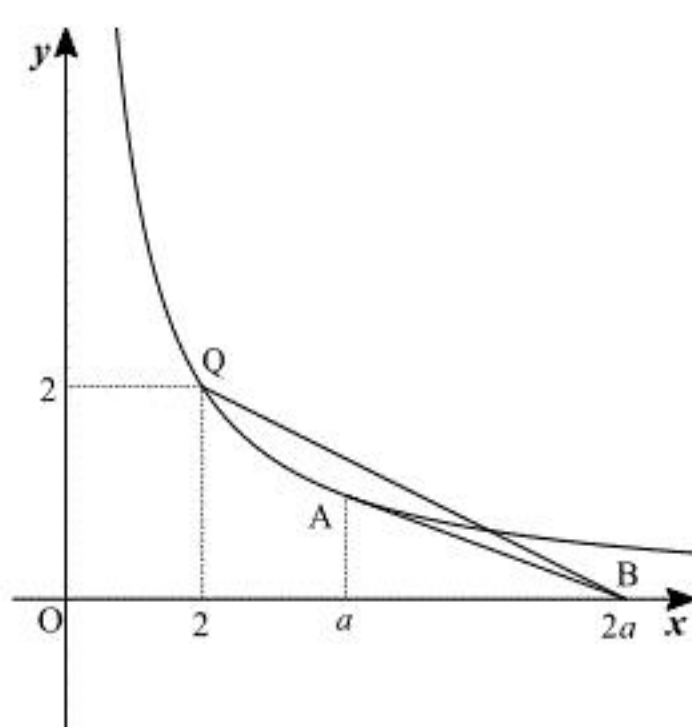
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = 1$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{t^2 + t}{t^2 + t + 1}, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} = 1$$

(1)

$a > 2$ より、以下の図のようになっている。



$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$$

より、直線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{a^2}(x-a) + \frac{4}{a} \\ &= -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a} \end{aligned}$$

と分かる。また、直線 ℓ と x 軸との交点 B の x 座標は、直線 ℓ の方程式に $y=0$ を代入することで、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a} \\ \therefore x &= 2a \end{aligned}$$

と得られるので、

$$b = 2a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{8}{a}, b = 2a$$

(2)

x 軸と直線 $x=2$ 、および直線 QB で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を V_1 、 x 軸と直線 $x=2$, $x=a$ 、および曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を V_2 、 x 軸と直線 $x=a$ 、および直線 AB で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を V_3 とおく。このとき、求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 - V_3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^2 \pi \cdot (2a-2) - \pi \int_2^a \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{a}\right)^2 \pi \cdot (2a-a) \\ &= \frac{8}{3} \pi (a-1) - 16\pi \left[-\frac{1}{x}\right]_2^a - \frac{16}{3a} \pi \\ &= \frac{8}{3} \pi \left(a - 4 + \frac{4}{a}\right) \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{8}{3} \pi \left(a - 4 + \frac{4}{a}\right)$$

(3)

(2)の結果より、

$$V = \frac{8}{3a} \pi (a-2)^2$$

と表すことができるから、

$$\frac{V}{(a-2)^2} = \frac{8}{3a} \pi$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 2+0} \frac{V}{(a-2)^2} &= \lim_{a \rightarrow 2+0} \frac{8}{3a} \pi \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow 2+0} \frac{V}{(a-2)^2} = \frac{4}{3} \pi$$

(4)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{8}{3a} \pi (a-2)^2 &= 12\pi \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 17a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-8)(2a-1) &= 0 \\ \therefore a &= 8 \quad (\because a > 2) \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a = 8$$