

〔解答〕

|     |     |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (a) | ア | イ | ウ | エ | オ |   |   |
|     |     | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 |   |   |
|     | (b) | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ |
|     |     | 5 | 2 | 7 | 6 | 4 | 9 | 6 |
| (2) |     | ス | セ | ソ | タ | チ |   |   |
|     |     | 0 | 3 | 2 | 2 | 7 |   |   |

〔解説〕

(1)

(a)

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{3x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2e^{2x} \cdot x - e^{2x}}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x}}{3x^2}$$

であるから、 $x \neq 0$ での増減表は次のようになる。

|         |            |   |            |                |            |
|---------|------------|---|------------|----------------|------------|
| $x$     | ...        | 0 | ...        | $\frac{1}{2}$  | ...        |
| $f'(x)$ | -          |   | -          | 0              | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |   | $\searrow$ | $\frac{2}{3}e$ | $\nearrow$ |

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}e$ をとる。

(b)

$$f'(3) = \frac{5e^6}{27}, f(3) = \frac{e^6}{9}$$

であるから、求める接線の方程式は、

$$y - \frac{e^6}{9} = \frac{5e^6}{27}(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{27}e^6x - \frac{4}{9}e^6$$

である。

(2)

$$e^{4x-11} - 2ax^3 + 12ax^2 - 24ax + 16a = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-11} = 2a(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-11} = 2a(x-2)^3$$

である。 $x=2$ は解に持たないから、 $f(x) = \frac{e^{4x-11}}{2(x-2)^3} (x \neq 2)$ とすると、

$$e^{4x-11} - 2ax^3 + 12ax^2 - 24ax + 16a = 0 \text{ が実数解をもつ}$$

$$\Leftrightarrow \text{曲線 } y = f(x) \text{ と直線 } y = a \text{ が共有点をもつ}$$

となる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4e^{4x-11} \cdot (x-2)^3 - e^{4x-11} \cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6} \\ &= \frac{(4x-11)e^{4x-11}}{2(x-2)^4} \end{aligned}$$

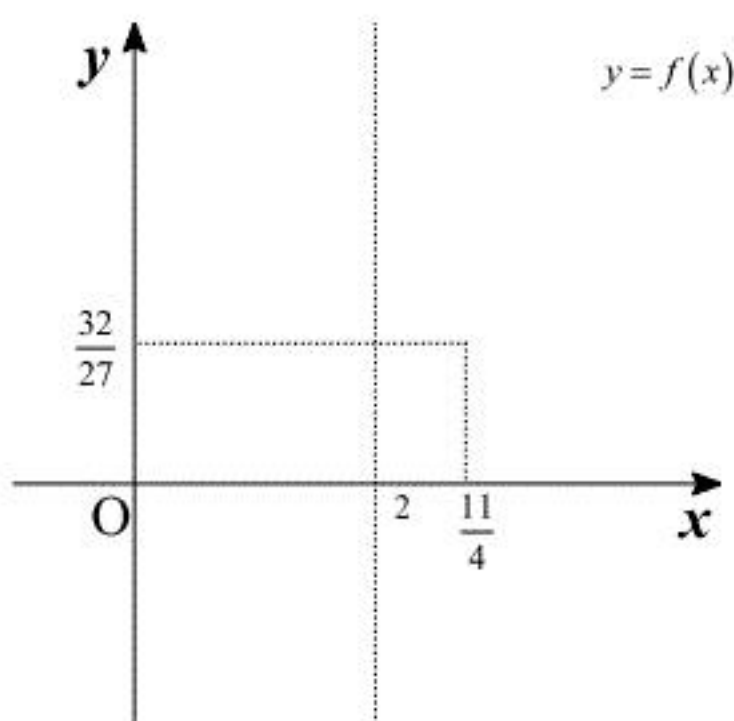
であるから、増減表は次のようになる。

|         |            |   |            |                 |            |
|---------|------------|---|------------|-----------------|------------|
| $x$     | ...        | 2 | ...        | $\frac{11}{4}$  | ...        |
| $f'(x)$ | -          |   | -          | 0               | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |   | $\searrow$ | $\frac{32}{27}$ | $\nearrow$ |

また、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であるから、グラフは以下のように書ける。



したがって、求める $a$ の値の範囲は、 $a < 0$ 、 $a \geq \frac{32}{27}$ である。

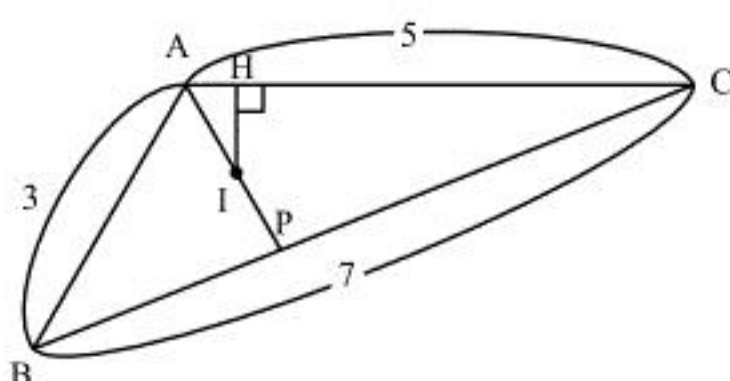
【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ |
|     | 1 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 7 | 3 | 3 |
| (2) | サ | シ | ス | セ | ソ |   |   |   |   |   |
|     | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |   |   |   |   |   |
| (3) | タ | チ | ツ | テ |   |   |   |   |   |   |
|     | 3 | 5 | 8 | 7 |   |   |   |   |   |   |

【解説】

(1)

題意より、以下の図のようになっている。



余弦定理より、

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$$

であることが分かるので、

$$\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。従って、 $\triangle ABC$ の面積を $S$ とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$$

と計算できる。これより、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を $r$ とすると、

$$S = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot (3 + 7 + 5)r$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

と求めることができる。さらに、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を $R$ とすると、正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

と求めることができる。

(2)

(1)の結果より、

$$\angle CAP = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \sin \angle CAP = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

を得る。ここで、点Iから直線ACに下ろした垂線の足をHとすると、 $\triangle AHI$ について、

$$\angle IHA = \frac{\pi}{2}, \angle HAI = \frac{\pi}{3}$$

が成り立つので、

$$AH = \frac{1}{\sqrt{3}}HI = \frac{1}{\sqrt{3}}r = \frac{1}{2}$$

と分かる。これより、

$$CH = AC - AH = \frac{9}{2}$$

であるから、 $\triangle CHI$ に関する三平方の定理より、

$$CI = \sqrt{CH^2 + HI^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{21}$$

と求めることができる。

(3)

直線APは $\angle BAC$ の二等分線であるから、

$$BP : CP = AB : AC$$

$$\Leftrightarrow BP : CP = 3 : 5$$

$$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{3}{5}$$

と求めることができる。これより、

$$BP = \frac{3}{3+5}BC = \frac{21}{8}$$

を得る。BIは $\angle ABP$ の二等分線であるから、

$$AI : PI = BA : BP$$

$$\Leftrightarrow AI : PI = 3 : \frac{21}{8}$$

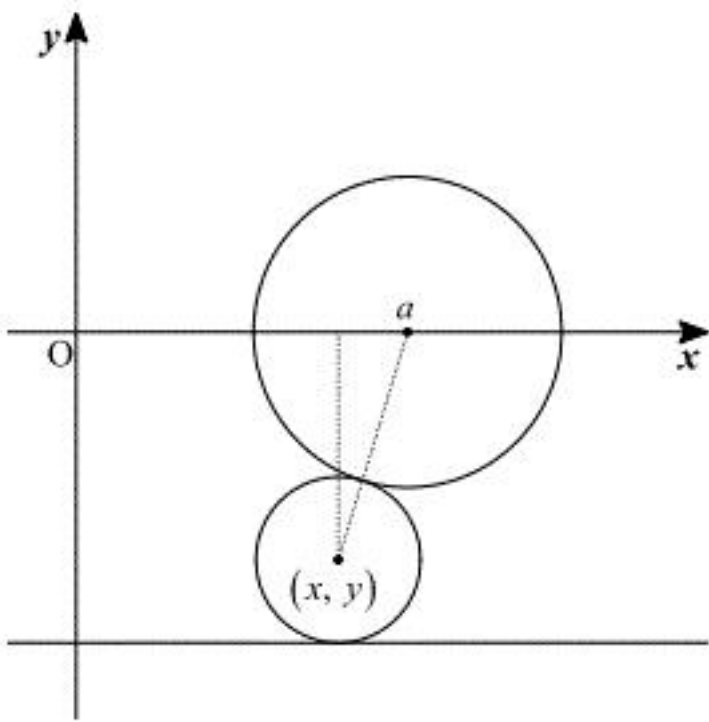
$$\therefore \frac{AI}{PI} = \frac{3}{\frac{21}{8}} = \frac{8}{7}$$

と求めることができる。

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ |   |   |   |
|     | 2 | 8 | 8 | 5 |   |   |   |
| (2) | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ |
|     | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 6 | 6 |
| (3) | シ | ス |   |   |   |   |   |
|     | 1 | 2 |   |   |   |   |   |

【解説】



(1) 外接円の中心を  $(x, y)$ 、半径を  $r$  とおく。外接円は直線  $y = -4$  に接するから、  
 $y = r - 4 \Leftrightarrow r = y + 4$   
が成り立つ。よって、上図のように外接円の中心、 $(a, 0)$ 、外接円の中心から  $x$  軸に下ろした足の3点を頂点とする直角三角形において、三平方の定理より

$$\begin{aligned} |x - a|^2 + |y|^2 &= (r + 2)^2 \\ \Leftrightarrow |x - a|^2 + |y|^2 &= (y + 6)^2 \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 + y^2 &= y^2 + 12y + 36 \\ \therefore y &= \frac{1}{12}(x - a)^2 - 3 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、①に  $y = 0$  を代入すると、 $x = a \pm 6$  と解ける。よって求める体積は

$$\begin{aligned} \int_{a-6}^{a+6} \pi |y|^2 dx &= \frac{\pi}{144} \int_{a-6}^{a+6} \left\{ (x - a)^2 - 36 \right\}^2 dx \\ &= \frac{\pi}{144} \int_{a-6}^{a+6} \left\{ (x - a)^4 - 72(x - a)^2 + 36^2 \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{144} \left[ \frac{1}{5}(x - a)^5 - 24(x - a)^3 + 36^2 x \right]_{a-6}^{a+6} \\ &= \frac{\pi}{144} \left( \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 6^5 - 24 \cdot 2 \cdot 6^3 + 36^2 \cdot 12 \right) \\ &= \frac{288}{5} \pi \end{aligned}$$

である。

(2) ①に  $x = 0$  を代入し、 $P\left(0, \frac{1}{12}a^2 - 3\right)$  と求められる。領域  $D$  は必ず  $y \leq 0$  の範囲にあるから、  
領域  $D$  の境界と  $y$  軸が共有点をもつとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}a^2 - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 36 &\leq 0 \\ -6 &\leq a \leq 6 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

(3) ①に  $y = 0$  を代入すると、 $x = a \pm 6$  であるから、 $Q(a + 6, 0)$  とわかる。ここで、線分  $PQ$  上の点を  $(x, y)$  とおく。②より、明らかに

$$0 \leq x \leq 12, -3 \leq y \leq 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。 $a = -6, 6$  のとき、線分  $PQ$  の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} &\text{点}(0, 0) \\ &y = 0 \text{ かつ } 0 \leq x \leq 12 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。 $a \neq \pm 6$  のとき、線分  $PQ$  の方程式は

$$\begin{aligned} (\textcircled{5} \text{の判別式}) &= x^2 - 24(x - 6 - 2y) \\ &= x^2 - 24x + 144 + 48y \\ \therefore x^2 - 24x + 144 + 48y &\geq 0 \\ \therefore y &\geq -\frac{1}{48}(x - 12)^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

が成立する。⑤の左辺を  $f(a)$  とおく。題意を満たすのは以下の[1][2]の場合が考えられる。

[1] ⑤が  $-6 < a < 6$  において2つの実数解(重解を含む)をもつ場合  
求める条件は

$$\begin{aligned} -6 &< \frac{x}{2} < 6 \\ f(-6) &> 0, f(6) > 0 \end{aligned}$$

である。 $f(-6) = 12(x - y)$ 、 $f(6) = -12y$  よりこれを整理すると

$$-12 < x < 12 \text{ かつ } y < x \text{ かつ } y < 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

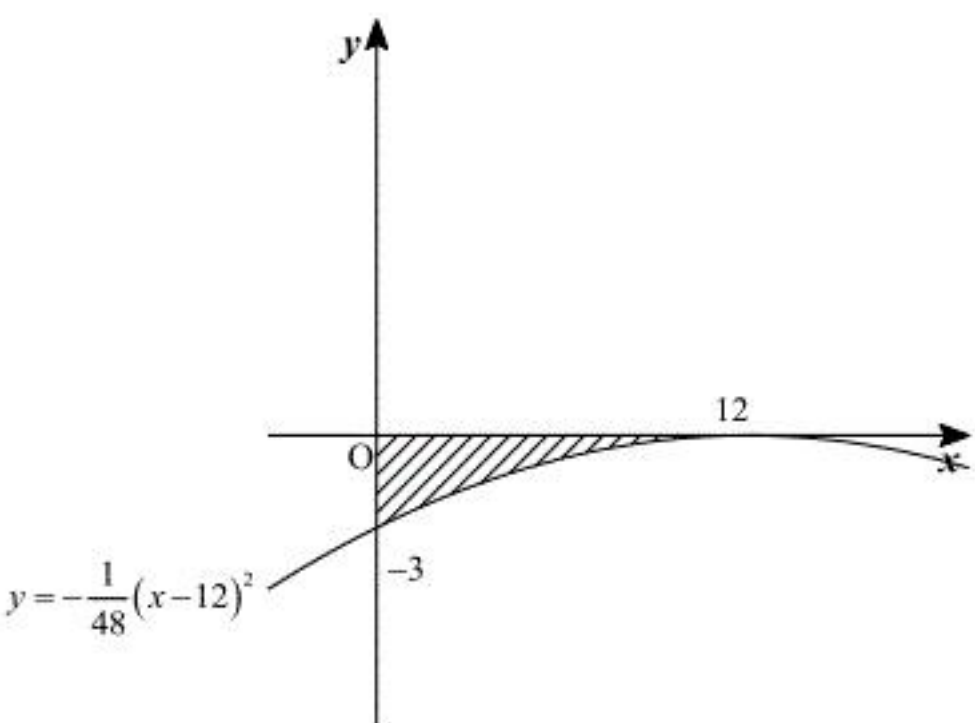
である。

[2] ⑤が  $-6 < a < 6$  において1つの実数解をもち、残りの解を  $-6 < a < 6$  以外にもつ場合  
条件より

$$\begin{aligned} f(-6) \cdot f(6) &< 0 \\ \text{であるから、これを整理すると} \\ 0 &< y < x \text{ または } x < y < 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

である。

以上③、④、⑥、⑦、⑧より、線分  $PQ$  の通過する領域は下図のように描ける(ただし境界線を含む)。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{12} \left| -\frac{1}{48}(x - 12)^2 \right| dx &= \frac{1}{48} \left[ \frac{1}{3}(x - 12)^3 \right]_0^{12} \\ &= 12 \end{aligned}$$

とわかる。

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ |   |   |   |   |   |
|     | 5 | 9 | 5 | 1 | 8 |   |   |   |   |   |
| (2) | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ |   |
|     | 5 | 9 | 4 | 9 | 5 | 1 | 8 | 5 | 9 |   |
| (3) | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ |
|     | 2 | 5 | 1 | 0 | 5 | 9 | 1 | 9 | 1 | 0 |
| (4) | ノ | ハ | ヒ | フ | ヘ | ホ | マ |   |   |   |
|     | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 7 | 4 |   |   |   |

【解説】

(1)

1回目の試行を終えた時に袋Aに赤球と白球が1個ずつ入っている場合とは、同じ色の球同士を移しあう場合であるから、その確率 $p_1$ は

$$p_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}=\frac{5}{9}$$

となる。また、1回目の試行を終えた時に袋Aに白球が2個入っている場合とは、AからBに赤球を移し、BからAに白球を移す場合であるから、その確率 $q_1$ は

$$q_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$$

となる。

(2)

$n+1$ 回目の試行を終えた時に袋Aに赤球と白球が1個ずつ入っている場合とは、 $n$ 回目の試行を終えた時に袋Aに赤球と白球が1個ずつ入っており、 $n+1$ 回目の試行で同じ色の球同士を移しあう場合、もしくは $n$ 回目の試行を終えた時に袋Aに白球が2個入っており、 $n+1$ 回目の試行でAからBに白球を、BからAに赤球を移す場合である。よって、その確率 $p_{n+1}$ は $p_n, q_n$ を用いて

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} \right) p_n + \frac{4}{9} q_n \\ \therefore p_{n+1} &= \frac{5}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n \qquad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

と表される。また、 $n+1$ 回目の試行を終えた時に袋Aに白球が2個入っている場合とは、 $n$ 回目の試行を終えた時に袋Aに赤球と白球が1個ずつ入っており、 $n+1$ 回目の試行でAからBに赤球を、BからAに白球を移す場合、もしくは $n$ 回目の試行を終えた時に袋Aに白球が2個入っており、 $n+1$ 回目の試行で白球同士を移し合う場合である。よって、その確率 $q_{n+1}$ は $p_n, q_n$ を用いて

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} p_n + \frac{5}{9} q_n \\ \therefore q_{n+1} &= \frac{5}{18} p_n + \frac{5}{9} q_n \qquad \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

と表される。

(3)

$r_n = p_n + \alpha q_n, s_n = p_n - \alpha q_n$ とおくと、①、②より、 $r_{n+1}, s_{n+1}$ は $p_n, q_n$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p_{n+1} + \alpha q_{n+1} \\ &= \frac{5}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n + \alpha \left( \frac{5}{18} p_n + \frac{5}{9} q_n \right) \\ &= \frac{5}{18} (2 + \alpha) p_n + \frac{1}{9} (4 + 5\alpha) q_n \\ &= \frac{5}{18} (2 + \alpha) \left\{ p_n + \frac{2(4 + 5\alpha)}{5(2 + \alpha)} q_n \right\} \\ s_{n+1} &= p_{n+1} - \alpha q_{n+1} \\ &= \frac{5}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n - \alpha \left( \frac{5}{18} p_n + \frac{5}{9} q_n \right) \\ &= \frac{5}{18} (2 - \alpha) p_n + \frac{1}{9} (4 - 5\alpha) q_n \\ &= \frac{5}{18} (2 - \alpha) \left\{ p_n + \frac{2(4 - 5\alpha)}{5(2 - \alpha)} q_n \right\} \end{aligned}$$

と表される。よって、数列 $\{r_n\}, \{s_n\}$ がともに等比数列となる条件は、

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{5}{18} (2 + \alpha) r_n \\ s_{n+1} = \frac{5}{18} (2 - \alpha) s_n \end{cases} \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

となること、すなわち

$$\begin{cases} \frac{2(4 + 5\alpha)}{5(2 + \alpha)} = \alpha \\ \frac{2(4 - 5\alpha)}{5(2 - \alpha)} = -\alpha \end{cases}$$

が成り立つことである。上記2式は整理するとどちらも、

$$5\alpha^2 = 8$$

となるから、 $\alpha > 0$ を考慮すると、数列 $\{r_n\}, \{s_n\}$ がともに等比数列となるのは

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

となるときである。またこのとき、 $\{r_n\}$ の公比は③式から、

$$\frac{5}{18} \left( 2 + \frac{2}{5} \sqrt{10} \right) = \frac{5 + \sqrt{10}}{9} = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \sqrt{10}$$

と求まる。

(4)

(3)と同様に $\{s_n\}$ の公比は③式から、

$$\frac{5}{18} \left( 2 - \frac{2}{5} \sqrt{10} \right) = \frac{5 - \sqrt{10}}{9}$$

と求まる。 $r_1, s_1$ の値は

$$\begin{cases} r_1 = p_1 + \alpha q_1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{5} \sqrt{10} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5 + \sqrt{10}}{9} \\ s_1 = p_1 - \alpha q_1 = \frac{5}{9} - \frac{2}{5} \sqrt{10} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5 - \sqrt{10}}{9} \end{cases}$$

であるから、数列 $\{r_n\}, \{s_n\}$ の一般項はそれぞれ

$$\begin{cases} r_n = r_1 \cdot \left( \frac{5 + \sqrt{10}}{9} \right)^{n-1} = \left( \frac{5 + \sqrt{10}}{9} \right)^n \\ s_n = s_1 \cdot \left( \frac{5 - \sqrt{10}}{9} \right)^{n-1} = \left( \frac{5 - \sqrt{10}}{9} \right)^n \end{cases}$$

となる。また、 $r_n = p_n + \alpha q_n, s_n = p_n - \alpha q_n$ であるから、以上より、数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ の一般項は、

$$\begin{cases} p_n = \frac{r_n + s_n}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{5 + \sqrt{10}}{9} \right)^n + \left( \frac{5 - \sqrt{10}}{9} \right)^n \right\} \\ q_n = \frac{r_n - s_n}{2\alpha} = \frac{5}{4\sqrt{10}} \left\{ \left( \frac{5 + \sqrt{10}}{9} \right)^n - \left( \frac{5 - \sqrt{10}}{9} \right)^n \right\} \end{cases}$$

と求まる。ここで、ちょうど4回目の試行で終了する確率とは、3回目の試行を終えて袋Aの中に赤球、白球がそれぞれ1個ずつ入っている状態から、4回目の試行でAからBに白球を、

BからAに赤球を移す場合のみである。 $\frac{5 + \sqrt{10}}{9} = x, \frac{5 - \sqrt{10}}{9} = y$ とおくと、

$$\begin{cases} x + y = \frac{10}{9} \\ x - y = \frac{2}{9} \sqrt{10} \\ xy = \frac{25 - 10}{9^2} = \frac{5}{27} \\ x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \frac{70}{81} \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2} (x^3 + y^3) \\ &= \frac{1}{2} (x + y) (x^2 - xy + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} \cdot \left( \frac{70}{81} - \frac{5}{27} \right) \\ &= \frac{275}{729} \end{aligned}$$

となる。これより、ちょうど4回目の試行で終了する確率は

$$p_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} = \frac{275}{4374}$$

である。

【解答】

|     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| (1) | (a) | ア | イ |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     |     | 2 | 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     | (b) | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ |  |  |
|     |     | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 9 |  |  |
| (2) | ス   | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト |   |   |   |  |  |
|     | 5   | 1 | 2 | 2 | 2 | 5 | 4 | 5 |   |   |   |  |  |

【解説】

(1)

(a)

関数  $f(x) = x^{p-1} + \frac{1}{x^p}$  ( $x > 0$ ) の導関数は

$$f'(x) = (p-1)x^{p-2} - \frac{p}{x^{p+1}}$$

$$= -(1-p)x^{p-2} - \frac{p}{x^{p+1}}$$

であり、関数  $g(x)$  を  $g(x) = 2f(x)$  と定めるから、曲線  $y = g(x)$  上の点  $(1, g(1))$  における接線 $\ell$  の方程式は

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = 2f'(1)(x-1) + 2f(1)$$

$$\therefore y = -2x + 6 \quad (\because f'(1) = -1, f(1) = 2)$$

であることがわかる。

(b)

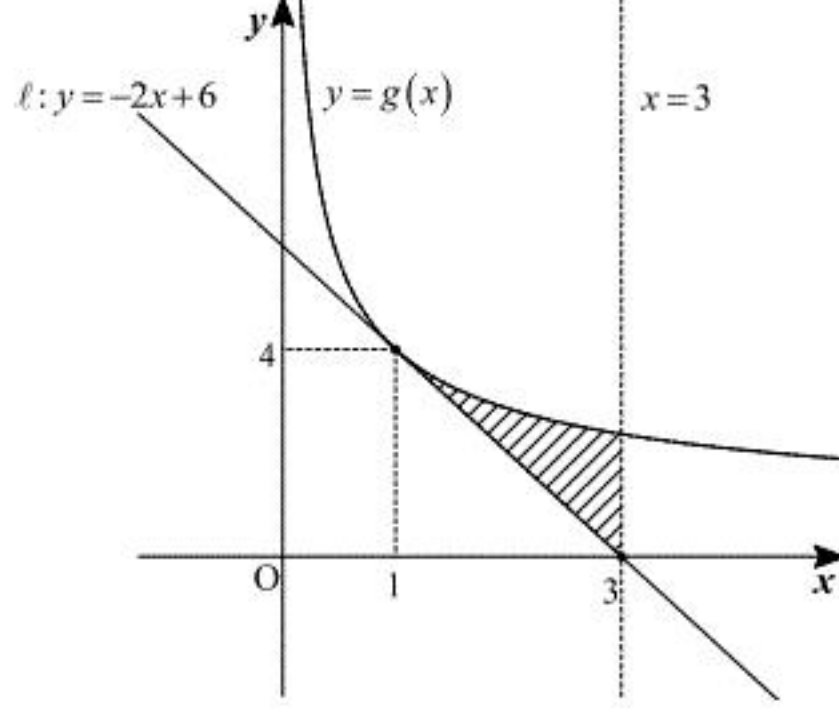
関数  $f(x) = x^{p-1} + \frac{1}{x^p}$  ( $x > 0$ ) の第2次導関数は

$$f''(x) = (p-1)(p-2)x^{p-3} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}}$$

$$= (1-p)(2-p)x^{p-3} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}}$$

であり、 $0 < p < 1$  より  $(1-p)(2-p) > 0$  であるから、 $x > 0$  において常に  $f''(x) > 0$  である。よって、関数  $g(x)$  の第2次導関数についても  $g''(x) (= 2f''(x)) > 0$  を満たすから、曲線  $y = g(x)$ のグラフは下に凸となる。また、 $x > 0$  において  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) < 0$  より  $g(x) > 0$ ,  $g'(x) < 0$  であり、 $0 < p < 1$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} 2 \left( \frac{1}{x^{1-p}} + \frac{1}{x^p} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{1}{x^{1-p}} + \frac{1}{x^p} \right) = 0$$

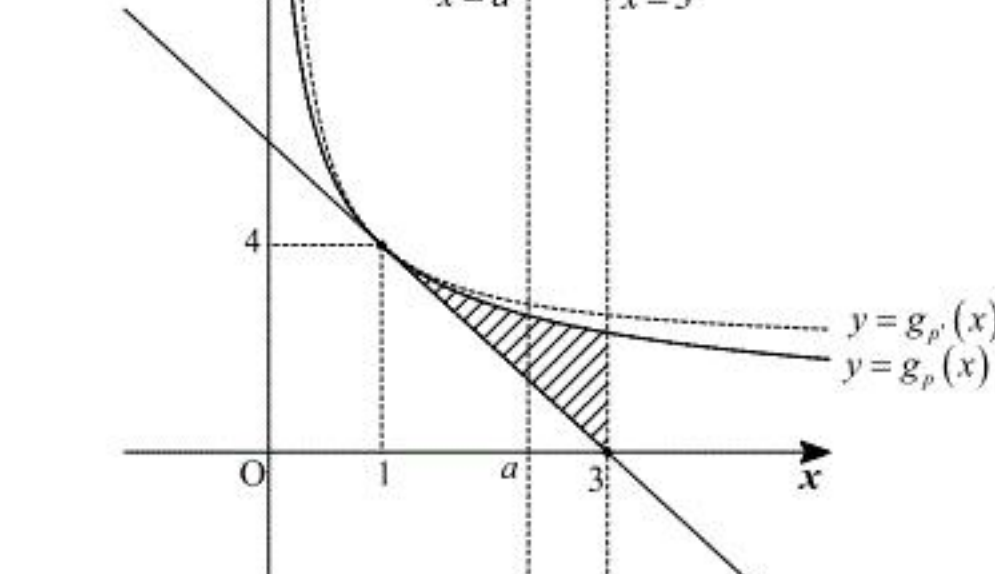
であることに注意すると、曲線  $y = g(x)$  と接線  $\ell$  は以下の図のようになる。したがって、曲線  $y = g(x)$ 、接線  $\ell$  および直線  $x = 3$  で囲まれた部分の面積  $S_1$  は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^3 \{g(x) - (-2x + 6)\} dx \\ &= 2 \int_1^3 \left( x^{p-1} + \frac{1}{x^p} \right) dx - \int_1^3 (-2x + 6) dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^p}{p} + \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^3 - \left[ -x^2 + 6x \right]_1^3 \\ &= 2 \left\{ \left( \frac{3^p}{p} + \frac{3^{1-p}}{1-p} \right) - \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) \right\} - \{(-9+18) - (-1+6)\} \\ &= \frac{2}{p}(3^p - 1) + \frac{2}{1-p}(3^{1-p} - 1) - 4 \end{aligned}$$

と求まる。次に  $p$  が  $\frac{1}{9} \leq p \leq \frac{4}{5}$  の範囲を動くとき、 $S_1$  の最大・最小について考える。以下、関数  $g(x)$  について、 $p$  に注目することで、 $g_p(x) = 2 \left( x^{p-1} + \frac{1}{x^p} \right)$  と表すことにする。また、同様に  $S_1$  について、 $p$  の関数と考えることで、 $S_1(p) = \frac{2}{p}(3^p - 1) + \frac{2}{1-p}(3^{1-p} - 1) - 4$  と表すことにする。このとき、接線  $\ell$  の式は  $p$  に依存しないことから、上図と合わせて、 $0 < p, p' < 1$  を満たす実数  $p, p'$  について

$$1 < x < 3 \text{ において常に } g_p(x) < g_{p'}(x) \text{ ならば, } S_1(p) < S_1(p') \text{ が成立する}$$

ということがわかる。

ここで、 $1 < a < 3$  を満たす実数  $a$  を固定することで

$$g_p(a) = 2 \left( a^{p-1} + \frac{1}{a^p} \right)$$

について、 $p$  の関数と考えることができる。よって、関数  $e(p)$  を  $e(p) = 2 \left( a^{p-1} + \frac{1}{a^p} \right)$  と定め、

この関数の微分、増減を調べると以下のようになる。

$$\begin{aligned} e'(p) &= 2 \left( \log a \cdot a^{p-1} - \frac{\log a}{a^p} \right) \\ &= \frac{2 \log a}{a^p} (a^{2p-1} - 1) \\ &= \frac{2 \log a}{a^p} \left( a^{p-\frac{1}{2}} + 1 \right) \left( a^{p-\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &\quad \left( \log a > 0, a^p > 0, a^{p-\frac{1}{2}} + 1 > 0 \quad (\because 1 < a < 3) \right) \end{aligned}$$

|         |               |            |               |            |               |
|---------|---------------|------------|---------------|------------|---------------|
| $p$     | $\frac{1}{9}$ | $\cdots$   | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$   | $\frac{4}{5}$ |
| $e'(p)$ |               | $-$        | $0$           | $+$        |               |
| $e(p)$  |               | $\searrow$ | 最小            | $\nearrow$ |               |

さらに、関数  $e(p)$  は  $e(p) = e(1-p)$  を満たすから、曲線  $q = e(p)$  は直線  $p = \frac{1}{2}$  について線対称なグラフとなるため、 $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \right| > \left| \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \right|$  より  $p = \frac{1}{9}$  で最大、 $p = \frac{1}{2}$  で最小となることがわかる。これらは  $1 < a < 3$  を満たすすべての実数  $a$  で成り立つから、 $\frac{1}{9} < p \leq \frac{4}{5}$ ,  $p \neq \frac{1}{2}$  を満たす実数 $p$  について

$$1 < x < 3 \text{ において常に } g_{\frac{1}{2}}(x) < g_p(x) < g_{\frac{4}{5}}(x) \text{ であるから, } S_1\left(\frac{1}{2}\right) < S_1(p) < S_1\left(\frac{4}{5}\right)$$

となることがわかる。したがって、 $p$  が  $\frac{1}{9} \leq p \leq \frac{4}{5}$  の範囲を動くとき、 $S_1$  は  $p = \frac{1}{2}$  のとき最小値をとり、 $p = \frac{1}{9}$  のとき最大値をとる。

(2)

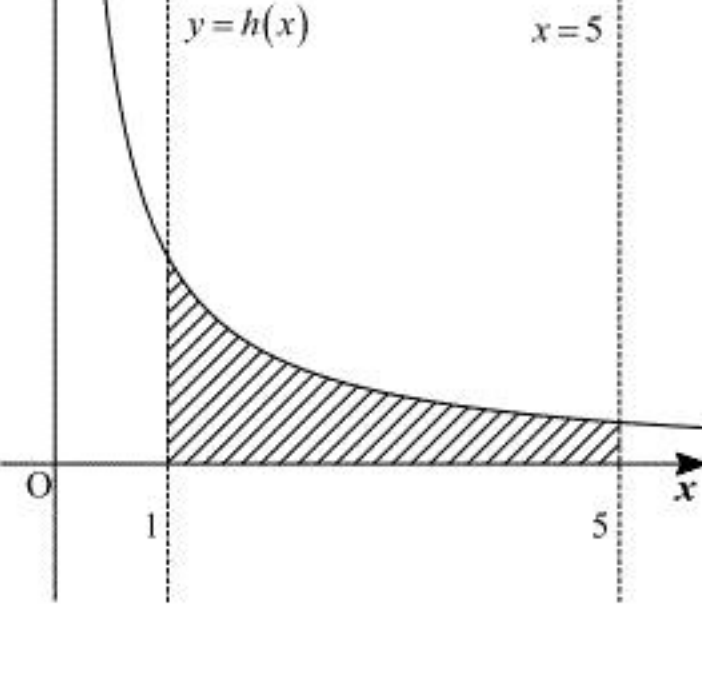
関数  $h(x) = (f(x))^2$  の導関数、第2次導関数は

$$h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$$

$$h''(x) = 2(f'(x))^2 + 2f(x) \cdot f''(x)$$

と表すことができ、(1)の結果より  $x > 0$  において  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$  であるから、 $h(x) > 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h''(x) > 0$  となる。また、 $0 < p < 1$  のとき

$$\lim_{p \rightarrow +0} h(x) = \lim_{p \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x^{1-p}} + \frac{1}{x^p} \right)^2 = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{1-p}} + \frac{1}{x^p} \right)^2 = 0$$

であることに注意すると、曲線  $y = h(x)$  は以下の図のようになる。よって、曲線  $y = h(x)$ 、直線  $x = 1$ ,  $x = 5$  および  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S_2$  は、 $p \neq \frac{1}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^5 h(x) dx \\ &= \int_1^5 \left( x^{2p-2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^{2p}} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + 2 \log x + \frac{x^{1-2p}}{1-2p} \right]_1^5 \quad \left( \because p \neq \frac{1}{2} \right) \\ &= \left( \frac{5^{2p-1}}{2p-1} + 2 \log 5 + \frac{5^{1-2p}}{1-2p} \right) - \left( \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{1-2p} \right) \\ &= \frac{5^{1-2p} - 5^{-1+2p}}{1-2p} + 2 \log 5 \end{aligned}$$

と求まる。さらに、 $p \rightarrow \frac{1}{2}$  の極限を計算すると

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} S_2 &= \lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{5^{1-2p} - 5^{-1+2p}}{1-2p} + 2 \log 5 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (\log 5) \cdot \frac{e^{(\log 5)(1-2p)} - 1}{(\log 5)(1-2p)} + (\log 5) \cdot \frac{e^{(\log 5)(-1+2p)} - 1}{(\log 5)(-1+2p)} + 2 \log 5 \right\} \\ &= 4 \log 5 \quad \left( \because \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \right) \end{aligned}$$

であることがわかる。