

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	1	3	4	9	2	3	5	4	1	3	4	8	6	
(2)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ				
	3	3	2	9	9	5	2	3	3	2				
	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ
	4	3	1	3	1	3	2	0	1	3	1	2	7	6

【解説】

【解説】

(1)

- 頂点への移動の仕方は
- [1] P, Qが同じ点Xに存在する場合
- 1秒後にX以外の3点に等確率で移動する。・・・①
- [2] P, Qが異なる点X, Yに存在する場合
- 1秒後にX, Y以外の2点に等確率で移動する。・・・②
- の2通り存在する。

(a)

P, QはB, C, Dにそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で動く。したがって求める確率は①より

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。

(b)

- 1秒後にP, Qが同じ点に存在する場合とそうでない場合に分ける。
- [1] 1秒後にP, Qが同じ点に存在する場合
- (a)と同じ操作を繰り返す。よって、
- $$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
- と求められる。
- [2] 1秒後にP, Qが同じ点に存在しない場合
- 1秒後に(a)と排反の動作を行い、2秒後に同じ点へ移動する。よって②より、
- $$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
- と求められる。
- [1], [2]は排反であるため、求める確率は
- $$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$
- である。

(c)

- 2秒後にP, Qが同じ点に存在する場合とそうでない場合に分ける。
- [1] 2秒後にP, Qが同じ点に存在する場合
- (b)と同じ操作を行い、再び同じ点へ移動する。よって、
- $$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$
- と求められる。
- [2] 2秒後にP, Qが同じ点に存在しない場合
- (b)と排反の動作を行った後、同じ点へ移動する。よって、
- $$\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$
- と求められる。
- [1], [2]は排反であるため、求める確率は
- $$\frac{4}{27} + \frac{5}{18} = \frac{23}{54}$$
- である。

(d)

- PがB→C→Dの順に進む場合を考える。この時、①、②の条件から、QはB→C→DまたはD→C→Bの順に進む2通りが考えられる。以下、各々の確率を求める。
- [1] P, QがB→C→Dの順に進む場合
- ①、②の条件より、
- $$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{729}$$
- と求められる。
- [2] PがB→C→D、QがD→C→Bの順に進む場合
- ①、②の条件より、
- $$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{324}$$
- と求められる。
- PはB→C→Dを含め6通りの動き方が考えられる。[1], [2]は排反であるため、求める確率は
- $$6 \cdot \left(\frac{1}{729} + \frac{1}{324}\right) = \frac{13}{486}$$
- である。

(2)(a)

- xの値で場合分けを行う。
- [1] $0 < x \leq \frac{1}{3}$ のとき
- $g(x)$ を計算すると
- $$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^2 (t-3x) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - 3xt \right]_1^2 \\ &= -3x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$
- と求められる。
- [2] $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ のとき
- $g(x)$ を計算すると
- $$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^{2x} (3x-t) dt + \int_{2x}^2 (t-3x) dt \\ &= \left[3xt - \frac{t^2}{2} \right]_1^{2x} + \left[\frac{t^2}{2} - 3xt \right]_{2x}^2 \\ &= 9x^2 - 9x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$
- と求められる。
- [3] $\frac{2}{3} \leq x$ のとき
- $g(x)$ を計算すると
- $$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^2 (3x-t) dt \\ &= \left[3xt - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 3x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$
- と求められる。
- 以上[1], [2], [3]より、
- $$g(x) = \begin{cases} -3x + \frac{3}{2} & (0 < x \leq \frac{1}{3}) \\ 9x^2 - 9x + \frac{5}{2} & (\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}) \\ 3x - \frac{3}{2} & (\frac{2}{3} \leq x) \end{cases}$$
- である。

(b)

- xの値で場合分けを行う。
- [1] $0 < x \leq 1$ のとき
- $h(x)$ を計算すると
- $$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt \\ &= \left[x^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3} - x^2 t \right]_x^1 \\ &= \frac{4}{3} x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$
- と求められる。
- [2] $1 \leq x$ のとき
- $h(x)$ を計算すると
- $$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 (x^2 - t^2) dt \\ &= \left[x^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$
- と求められる。
- 以上[1], [2]より、
- $$h(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} x^3 - x^2 + \frac{1}{3} & (0 < x \leq 1) \\ x^2 - \frac{1}{3} & (1 \leq x) \end{cases}$$
- である。

(c)

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ であるから、以下の方程式に書き換えることができる。
- $$-3x + \frac{3}{2} = \frac{4}{3} x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \quad (0 < x \leq \frac{1}{3}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
- $$9x^2 - 9x + \frac{5}{2} = \frac{4}{3} x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \quad (\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
- $$3x - \frac{3}{2} = \frac{4}{3} x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \quad (\frac{2}{3} \leq x \leq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$
- $$3x - \frac{3}{2} = x^2 - \frac{1}{3} \quad (1 \leq x) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

- xの取り得る値に注意しつつこれを解くと、
- ①：解なし
- ②： $x = \frac{1}{2}$ のみ
- ③：解なし
- ④： $x = \frac{9 + \sqrt{39}}{6}$ のみ
- となり、実数解の個数は2個である。

(d)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3} x^3 + x^2 - 3x + \frac{7}{6} & (0 < x \leq \frac{1}{3}) \\ -\frac{4}{3} x^3 + 10x^2 - 9x + \frac{13}{6} & (\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}) \\ -\frac{4}{3} x^3 + x^2 + 3x - \frac{11}{6} & (\frac{2}{3} \leq x \leq 1) \\ -x^2 + 3x - \frac{7}{6} & (1 \leq x) \end{cases}$$

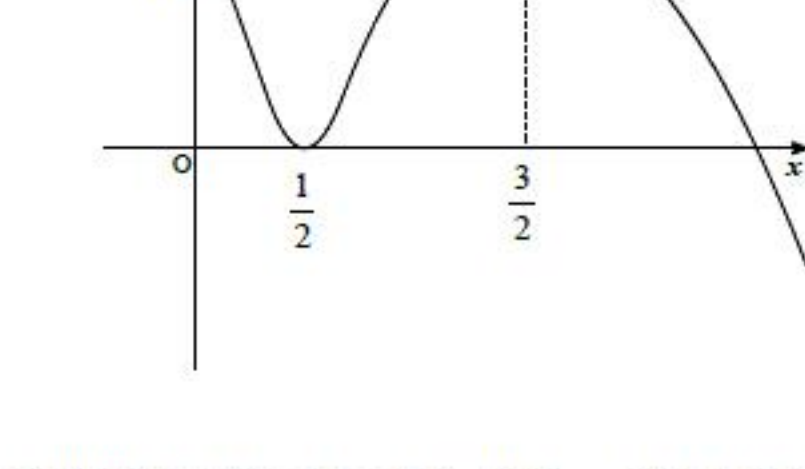
と整理できるから、

$$f'(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2x - 3 & (0 < x \leq \frac{1}{3}) \\ -4x^2 + 20x - 9 & (\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}) \\ -4x^2 + 2x + 3 & (\frac{2}{3} \leq x \leq 1) \\ -2x + 3 & (1 \leq x) \end{cases}$$

とわかる。よって、増減表は以下のとおりである。

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{3}{2}$	…
$f'(x)$		－	0	＋	0	－
$f(x)$			0		$\frac{13}{12}$	

また、グラフは以下の通りになる。

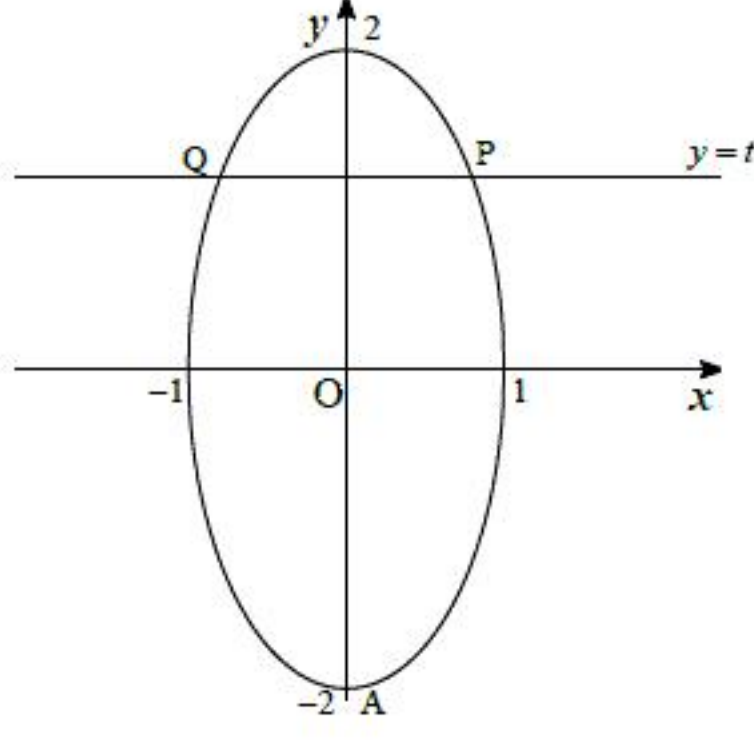


方程式 $f(x) = k$ が実数解をただ1つもつとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が $0 < x$ の範囲で共有点を1つもつから、求める解は $k < 0, \frac{13}{12} < k < \frac{7}{6}$ である。

2

(1)

問題文より、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $y = t$ 及び3点 P, Q, A の位置関係は下図のようになる。



点 P, Q は $y = t$ と楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ との交点より、P, Q の x 座標は

$$x^2 = 1 - \frac{t^2}{4}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \quad (\because 0 < t < 2)$$

である。P は第1象限にあり、Q は第2象限にあるから、P, Q の座標はそれぞれ

$P\left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}, t\right), Q\left(-\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}, t\right)$ となる。よって、三角形 APQ の面積 $S(t)$ は、PQ を底辺として考

えると、

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \{t - (-2)\}$$

$$\therefore S(t) = (t+2) \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = (t+2) \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$$

(2)

$S(t) = (t+2) \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$ の導関数は

$$S'(t) = (t+2)' \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} + (t+2) \left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \right)'$$

$$= \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} + \frac{(t+2) \cdot \left(-\frac{t}{2} \right)}{2 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}$$

$$= \frac{2 \left(1 - \frac{t^2}{4} \right) - \frac{t}{2} (t+2)}{2 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}$$

$$= \frac{-t^2 - t + 2}{\sqrt{4 - t^2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S'(t) = \frac{-t^2 - t + 2}{\sqrt{4 - t^2}}$$

(3)

$S'(t) = 0$ となるのは、 t の値が

$$\frac{-t^2 - t + 2}{\sqrt{4 - t^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 0 < t < 2)$$

となるときである。よって、 $S(t)$ の $0 < t < 2$ における増減表は以下のようになる。

t	0	...	1	...	2
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

上表より、三角形 APQ の面積 $S(t)$ が最大となるのは $t = 1$ のときであることがわかる。よって、

このときの P の座標は $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

(4)

$A(0, -2), P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ より、直線 AP の方程式は、

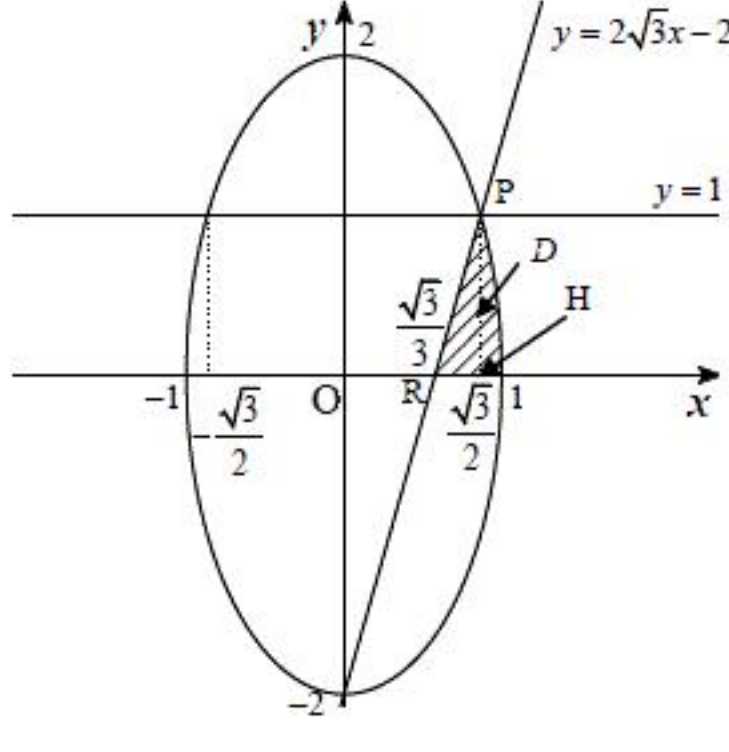
$$y + 2 = \frac{1 - (-2)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0} x$$

$$\therefore y = 2\sqrt{3}x - 2$$

と求まる。よって、 $a = 2\sqrt{3}$ である。また、このとき、連立不等式

$$y \geq 0, y \leq 2\sqrt{3}x - 2, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

の表す領域 D は下図のようになる。ただし、直線 AP と x 軸との交点を R、点 P から x 軸におろした垂線の足を H とおく。



R, H の座標はそれぞれ $R\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ となる。また、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の $y \geq 0$ の部分は

は

$$y = 2\sqrt{1 - x^2}$$

と表せる。このとき、 D の面積を T とおくと、

$$T = \text{三角形 PRH の面積} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\sqrt{1 - x^2} dx$$

となる。ここで、三角形 PRH の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

である。また、 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\sqrt{1 - x^2} dx$ について、 $x = \cos \theta$ とおくと、

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rightarrow$	1
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	0

であり、 $dx = -\sin \theta d\theta$ であるから、

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 2\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \cdot (-\sin \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。よって、 D の面積 T は

$$T = \frac{\sqrt{3}}{12} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = 2\sqrt{3}, D \text{ の面積: } \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}$$

(5)

領域 D は三角形 PRH とその他の部分に分けられる。三角形 PRH の部分を x 軸周りに1回転させてできる図形は半径 PH、高さ RH の円錐であり、その他の部分を x 軸周りに1回転させてできる図形の体積は

$$\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(2\sqrt{1 - x^2} \right)^2 dx$$

と表される。よって、領域 D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を V とおくと、

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot PH^2 \cdot RH + \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(2\sqrt{1 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + 4\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1 - x^2) dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + 4\pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + 4\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{9} \right) \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{8}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{9} \right) \pi$$

3

(1)

$x^4 + 2x^3 + x + 2$ は,

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + x + 2 &= x^3(x+2) + (x+2) \\ &= (x+2)(x^3+1) \\ &= (x+1)(x+2)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

と因数分解できる。

$$(\text{答}) \quad x^4 + 2x^3 + x + 2 = (x+1)(x+2)(x^2-x+1)$$

(2)

(a)

与えられた定積分は,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{(x+a)(x+a+1)} &= \int_0^a \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+a+1} \right) dx \\ &= [\log|x+a| - \log|x+a+1|]_0^a \\ &= \log \frac{2(a+1)}{2a+1} \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^a \frac{dx}{(x+a)(x+a+1)} = \log \frac{2(a+1)}{2a+1}$$

(b)

与えられた定積分は,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2} = \int_0^a \frac{dx}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2}$$

と変形できる。ここで,

$$x - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \tan \theta$$

とおくと,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}a}{2\cos^2\theta}$$

であり, 積分区間は以下のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	a
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

従って, 与えられた定積分は,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2} &= \int_0^a \frac{dx}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}a^2(\tan^2\theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2\cos^2\theta} \cdot d\theta \\ &= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3a} \theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9a} \pi \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9a} \pi$$

(3)

実数 a, b を用いて,

$$\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} = \frac{a}{(x+1)(x+2)} + \frac{b}{x^2-x+1}$$

と変形できるとすると,

$$\begin{aligned} \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} &= \frac{a}{(x+1)(x+2)} + \frac{b}{x^2-x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+3b)x + a+2b}{(x^2+3x+2)(x^2-x+1)} \\ \therefore a &= -1, b = 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\int_0^1 \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} dx = -\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$$

が成り立つ。ここで, (2)(a)において $a=1$ とすることで,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \log \frac{4}{3}$$

が得られ, (2)(b)において $a=1$ とすることで,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$$

が得られる。従って, 与えられた定積分は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} dx &= -\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= -\log \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \\ &= \log \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^1 \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} dx = \log \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$$