

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ			
	4	3	2	1	1			
(2)	カ	キ						
	2	4						
(3)	ク	ケ	コ	サ				
	2	2	7	4				
(4)	シ	ス	セ	ソ				
	4	0	6	0				
(5)	タ	チ	ツ					
	5	8	0					
(6)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
	4	5	9	9	5	7	3	0

【解説】

- (1) 1個と3個の2組に分ける分け方は ${}_4C_1=4$ となり、4通りであり、2個ずつの組に分ける分け方は $\frac{{}_4C_2}{2!}=3$ となり、3通りである。また、3個の数字を円形に並べる並べ方は $(3-1)!=2$ となり、2通りある。以上より、1個と3個の2組に分けたときは2通りの並べ方が存在し、2個ずつの組に分けたときは1通りの並べ方があるので、 $A(4,2)=4\cdot2+3\cdot1=11$ である。
- (2) 以下、 n 個の数字を a_1 個、 a_2 個、 $\dots$ 、 a_m 個に分けることを $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ と表し、 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ となるように円形に並べる方法の総数を $B(a_1, a_2, \dots, a_m)$ と表す。
(1)と同様に考えると、
$$\begin{aligned} A(4,1) &= B(4) \\ &= (4-1)! \\ &= 6 \\ A(4,3) &= B(2,1,1) \\ &= {}_4C_2 \\ &= 6 \\ A(4,4) &= B(1,1,1,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$
であるから、
$$\sum_{m=1}^4 A(4,m) = 6+11+6+1=24$$
である。
- (3) n 個の数字を m 組に分けて円形に並べることを考える。
[1] n が1個の独立した組になるとき
このような並べ方が存在するのは $m\geq2$ のときであり、その総数は、 $n-1$ 個の数字を $m-1$ 組に分ける並べ方と等しく
$$A(n-1,m-1)$$
である。
[2] n が1個の独立した組にならないとき
このような並べ方が存在するのは $m\leq n-1$ のときである。このとき、 n は1から $n-1$ までのいずれかの数字の左隣に置かれている。また、このように並べたものから n を取り除いても、 $n-1$ までの数字は m 組に分かれたままである。よって、このような並べ方の総数は、
$$(n-1)\cdot A(n-1,m)$$
である。
以上、[1],[2]より、
$$A(n,m)=A(n-1,m-1)+(n-1)\cdot A(n-1,m)\quad\cdots\textcircled{1}$$
が成り立つ。よって(1),(2)より、
$$\begin{aligned} A(5,1) &= 4\cdot A(4,1)=24 \\ A(5,2) &= A(4,1)+4\cdot A(4,2)=50 \\ A(5,3) &= A(4,2)+4\cdot A(4,3)=35 \\ A(5,4) &= A(4,3)+4\cdot A(4,4)=10 \\ A(5,5) &= A(4,4)=1 \end{aligned}$$
であり、これより
$$\begin{aligned} A(6,1) &= 5\cdot A(5,1)=120 \\ A(6,2) &= A(5,1)+5\cdot A(5,2)=274 \\ A(6,3) &= A(5,2)+5\cdot A(5,3)=225 \\ A(6,4) &= A(5,3)+5\cdot A(5,4)=85 \\ A(6,5) &= A(5,4)+5\cdot A(5,5)=15 \\ A(6,6) &= A(5,5)=1 \end{aligned}$$
を得る。よって $A(6,m)$ が最大となるのは $m=2$ のときであり、このとき $A(6,2)=274$ である。
- (4) n 個の数字を $n-1$ 組に分けると、2個の組が1つ、1個の組が $n-2$ つとなるから、
$$A(n,n-1)={}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$$
である。よって
$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{29} A(n,n-1) &= \sum_{n=2}^{29} \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{29} (n^2-n) \left(\because 1^2-1=0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot 29 \cdot 30 \cdot 59 - \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 \right) \\ &= 4060 \end{aligned}$$
である。
- (5) 7個の数字を3組に分けると、 $(5,1,1), (4,2,1), (3,3,1), (3,2,2)$ のいずれかとなる。
[1] $(5,1,1)$ のとき
このとき、1,2以外の5つの数字を $(3,1,1)$ となるように分ければよいので、並べる方法の総数は ${}_5C_3\cdot(5-1)!=240$ である。
[2] $(4,2,1)$ のとき
このとき、1,2以外の5つの数字を $(2,2,1)$ または $(4,1)$ となるように分ければよい。ここでの $(2,2,1)$ のうち2つの2個ずつの組は1,2と一緒になる方とならない方で区別することに注意すると、並べる方法の総数は $({}_3C_2\cdot{}_3C_2+{}_5C_4)\cdot(4-1)!=210$ である。
[3] $(3,3,1)$ のとき
このとき、1,2以外の5つの数字を $(3,1,1)$ となるように分ければよいので、2つの1個ずつの組は1,2と一緒になる方とならない方で区別することに注意すると、並べる方法の総数は ${}_5C_3\cdot{}_2C_1\cdot(3-1)!(3-1)!=80$ である。
[4] $(3,2,2)$ のとき
このとき、1,2以外の5つの数字を $(2,2,1)$ または $(3,2)$ となるように分ければよいので、並べる方法の総数は
$$\left(\frac{{}_5C_2\cdot{}_3C_2}{2!}+{}_5C_3 \right) \cdot (3-1)! = 50$$
である。
以上、[1],[2],[3],[4]より、求める方法の総数は $240+210+80+50=580$ である。
- (6) ①より、
$$\begin{aligned} A(12,5) &= A(11,4)+11\cdot A(11,5) \\ &= 8409500+11\cdot 3416930 \\ &= 45995730 \end{aligned}$$
である。

2

(1)

題意より、直線 ℓ は点 $P(a, a^2)$ を通る傾き $-\frac{1}{2}$ の直線であるから、その方程式は、

$$\ell: y = -\frac{1}{2}(x-a) + a^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2$$

(2)

ℓ と直線 $y=2x$ との交点 Q の x 座標は、

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2 = 2x$$

$$\therefore x = \frac{1}{5}a(1+2a)$$

と求められ、これより y 座標は、

$$y = 2x = \frac{2}{5}a(1+2a)$$

と分かる。従って、原点 O と点 Q の距離は、

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{5}a(1+2a)\right\}^2 + \left\{\frac{2}{5}a(1+2a)\right\}^2} = \frac{1}{5}a(1+2a)\sqrt{1^2+2^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}a(1+2a)$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{5}}{5}a(1+2a)$$

(3)

線分 PQ の長さは、

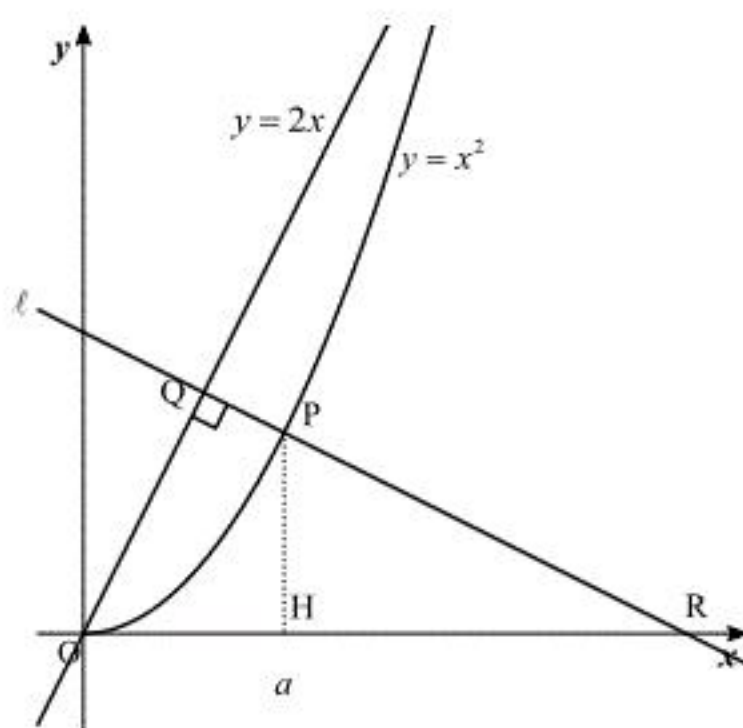
$$\sqrt{\left\{\frac{1}{5}a(4-2a)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{5}a(a-2)\right\}^2} = \frac{1}{5}a(2-a)\sqrt{2^2+1^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}a(2-a) \quad (\because a < 2)$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{5}}{5}a(2-a)$$

(4)

以下の図のように、直線 PQ と x 軸との交点を R 、点 P から x 軸への垂線の足を $H(a, 0)$ とする。



ここで、直線 ℓ と x 軸との交点 R の x 座標は、

$$0 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a + a^2$$

$$\therefore x = a + 2a^2$$

である。 D の面積を S 、 $\triangle OQR$ の面積を S_1 、 $\triangle HPR$ の面積を S_2 とすると、

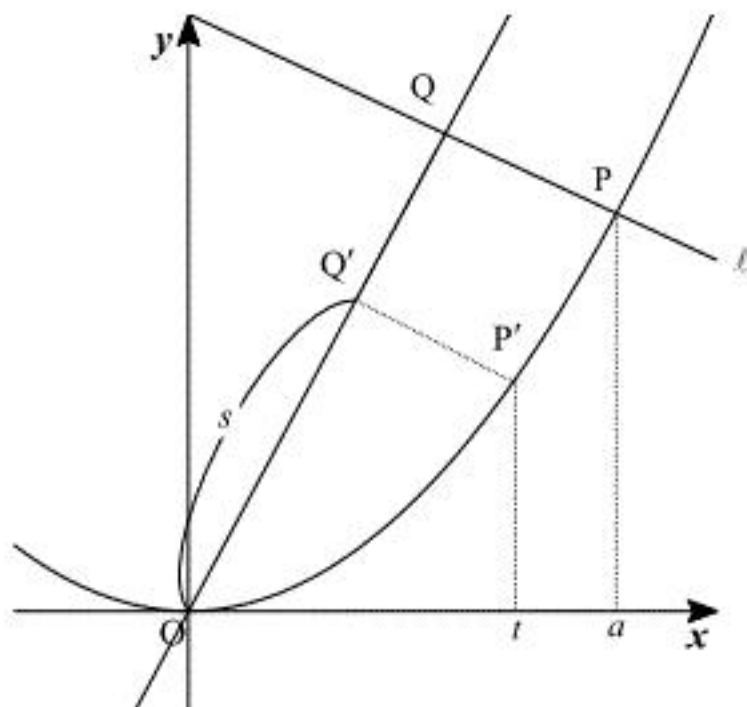
$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 - \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + 2a^2) \cdot \frac{2}{5}a(1+2a) - \frac{1}{2} \cdot (a + 2a^2 - a) \cdot a^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{5}a^2(1+2a)^2 - a^4 - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{1}{15}(-3a^2 + 7a + 3)a^2 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{15}(-3a^2 + 7a + 3)a^2$$

(5)

以下の図のように、実数 t ($0 < t < a$) を用いて点 $P'(t, t^2)$ を定め、 P' から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足を点 Q' とする。



(1), (2) と同様に考えることで、

$$Q'\left(\frac{1}{5}t(1+2t), \frac{2}{5}t(1+2t)\right)$$

$$OQ' = \frac{\sqrt{5}}{5}t(1+2t)$$

$$P'Q' = \frac{\sqrt{5}}{5}t(2-t)$$

と分かる。いま、

$$s = OQ' = \frac{\sqrt{5}}{5}t(1+2t)$$

とする。求める体積を V とすると、

$$V = \int_0^{a\sqrt{5}} \pi P'Q'^2 ds$$

として求めることができる。ここで、

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{5}(1+4t)$$

であり、積分区間は以下のように対応する。

$$\begin{array}{c|cc} s & 0 & \rightarrow & OQ \\ \hline t & 0 & \rightarrow & a \end{array}$$

以上より、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{a\sqrt{5}} \pi P'Q'^2 ds \\ &= \int_0^a \pi \cdot \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5}t(2-t) \right\}^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}(1+4t) dt \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{25} \int_0^a (4t^5 - 15t^4 + 12t^3 + 4t^2) dt \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{25} \left[\frac{2}{3}t^6 - 3t^5 + 3t^4 + \frac{4}{3}t^3 \right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{75} (2a^3 - 9a^2 + 9a + 4)a^3 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{5}\pi}{75} (2a^3 - 9a^2 + 9a + 4)a^3$$