

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ					
	5	2	6	5	2	6	5	8	1	5					
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス		
	3	8	9	8	3	3	8	8	1	5	2	6	2		
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ				
	1	2	8	7	1	3	9	3	2	1	9				

【解説】

(1)(a)

$\frac{u}{v} = k$ と置いて整理すると

$$3x + y + 3 = k(2x - 2y + 3)$$
$$\therefore (2k - 3)x - (2k + 1)y + 3k - 3 = 0$$

となり、これは直線を表す方程式である。 $x^2 + y^2 = 1$ より、原点と直線の距離が1以下であれば条件が成立する。よって、

$$\frac{|(2k - 3) \cdot 0 - (2k + 1) \cdot 0 + 3k - 3|}{\sqrt{(2k - 3)^2 + (2k + 1)^2}} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow (3k - 3)^2 \leq (2k - 3)^2 + (2k + 1)^2$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 10k - 1 \leq 0$$

となり、これを解いて $5 - \sqrt{26} \leq k \leq 5 + \sqrt{26}$ と求まる。よって $\frac{u}{v}$ の最大値は $5 + \sqrt{26}$ 、最小値は $5 - \sqrt{26}$ である。

(b)

$u^2 + v^2$ を x の方程式と見て整理すると

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (4x - 6y + 3)^2 + (4x + 3y - 1)^2 \\ &= 32x^2 + 8(-3y + 2)x + 45y^2 - 42y + 10 \\ &= 32\left(x + \frac{-3y + 2}{8}\right)^2 - \frac{(-3y + 2)^2}{2} + 45y^2 - 42y + 10 \\ &= 32\left(x + \frac{-3y + 2}{8}\right)^2 + \frac{81}{2}y^2 - 36y + 8 \\ &= 32\left(x + \frac{-3y + 2}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}(9y - 4)^2 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq y \leq 1$ より $-\frac{1}{8} \leq \frac{-3y + 2}{8} \leq \frac{1}{4}$ であるから、 $\left(x + \frac{-3y + 2}{8}\right)^2$ は $x = 1$ のときに最大となる。 $x = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (-6y + 7)^2 + (3y + 3)^2 \\ &= 45y^2 - 66y + 58 \\ &= 45\left(y - \frac{11}{15}\right)^2 + \frac{169}{5} \end{aligned}$$

であるから、 $u^2 + v^2$ は $x = 1, y = 0$ のとき最大となり、その最大値は 58 である。次に、以下のよう
に場合分けを行い最小値を求める。

[1] $\frac{3y - 2}{8} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{2}{3}$ のとき

$u^2 + v^2$ は $x = 0$ のとき最小となる。よって、 $u^2 + v^2$ に $x = 0$ を代入し

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (-6y + 3)^2 + (3y - 1)^2 \\ &= 45y^2 - 42y + 10 \\ &= 45\left(y - \frac{7}{15}\right)^2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

とすると、 $x = 0, y = \frac{7}{15}$ のとき最小値 $\frac{1}{5}$ をとるとわかる。

[2] $\frac{3y - 2}{8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 1$ のとき

$u^2 + v^2$ は $x = \frac{3y - 2}{8}$ のとき最小となる。よって、 $u^2 + v^2$ に $x = \frac{3y - 2}{8}$ を代入し

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{2}(9y - 4)^2$$

を得るので、 $y = \frac{2}{3}$ のときに最小値 2 をとることが分かる。

以上[1],[2]より、 $u^2 + v^2$ は $x = 0, y = \frac{7}{15}$ のときに最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

(2)(a)

$f(x)$ を整理すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \sin 2x - \frac{3}{4} \sin^2 x \\ &= \frac{3}{8} \left\{ \sqrt{3} \sin 2x - (1 - \cos 2x) \right\} \\ &= \frac{3}{8} \left\{ 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ より、 $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ 、 $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -1$ のとき、それぞれ最大
値、最小値をとる。よって、 $f(x)$ の最大値は $\frac{3}{8}$ 、最小値は $-\frac{9}{8}$ である。また、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x f'(x) dx &= \left[x f(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{8} \left[-\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 0 - \frac{3}{8} \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) \right\} \\ &= \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

と計算できる。

(b)

$g(x) = af(x) + \frac{3}{4}a + b$

と整理できる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{1}{2} \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ であるから、 $-\frac{3}{4} \leq f(x) \leq \frac{3}{8}$ とわかる。
 $a > 0$ であるから、 $g(x) = af(x) + \frac{3}{4}a + b$ の最大値が $\frac{3}{2}$ 、最小値が $-\frac{15}{2}$ となることより、

$$\begin{cases} \frac{9}{8}a + b = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{15}{2} \end{cases}$$
$$\therefore a = 8, b = -\frac{15}{2}$$

を得る。また、 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ のとき、それぞれ最大値、最小値をとることがわかる。

(3)

$a_1 = \frac{1}{4}$ ・・・①

$S_n = n(3n - 2)a_n$ ・・・②

が成立している。

(a)

①、②より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2 \cdot 4 \cdot a_2 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{1}{28} \end{aligned}$$

である。

(b)

(a)の結果と①、②より

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \cdot 7 \cdot a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot 10 \cdot a_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 39a_4 = 21a_3$$
$$\therefore a_4 = \frac{7}{13}a_3$$

である。

(c)

$n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= n(3n - 2)a_n - (n - 1)(3n - 5)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= n(3n - 2)a_n - (n - 1)(3n - 5)a_{n-1} \\ \Leftrightarrow (3n + 1)a_n &= (3n - 5)a_{n-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n - 5}{3n + 1} a_{n-1} \\ &= \frac{3n - 5}{3n + 1} \cdot \frac{3n - 8}{3n - 2} \cdot \frac{3n - 11}{3n - 5} \cdots \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \left(\because a_1 = \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} \end{aligned}$$

と求まる。これは $n = 1$ においても成立する。

(d)

$a_n = \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$ より、

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right) a_k &= \frac{9k^2 - 3k + 1}{9(9k^2 - 3k - 2)} \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{3}{9k^2 - 3k - 2} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3k - 2} - \frac{1}{3k + 1} \right) \end{aligned}$$

と整理できるため、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right) a_k &= \frac{n}{9} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{3n - 2} - \frac{1}{3n + 1} \right) \\ &= \frac{n}{9} + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{3n + 1} \right) \\ &= \frac{n}{9} + \frac{1}{9} \left(\frac{3n}{3n + 1} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right) a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{9} + \frac{1}{9} \left(\frac{3n}{3n + 1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{3n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

	(あ)	(い)	(う)
(1)	$\frac{1}{4}(12-x)x$	6	9
	(え)	(お)	
(2)(a)	$\frac{2}{3}\pi - \theta$	$\frac{\pi}{6} + \theta$	
	(か)		
(2)(b)	$6\sqrt{3} - 6$		

【解説】

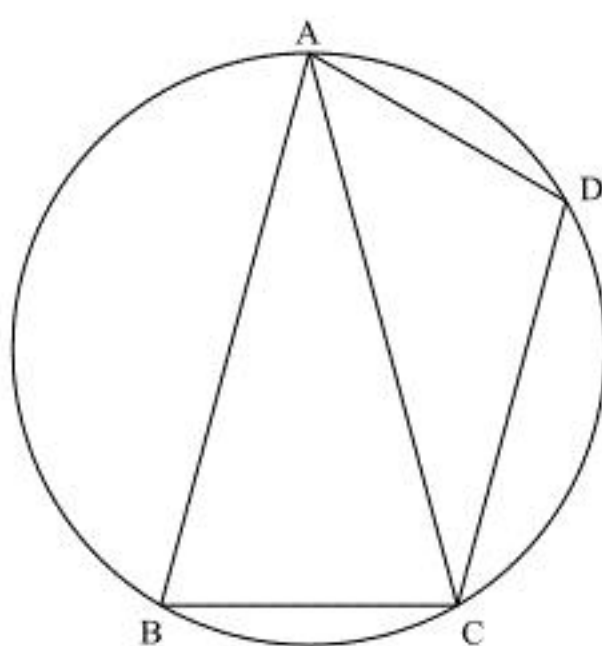
(1)

四角形 ABCD を三角形 ABC と三角形 ACD に分けて考えることで、

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CD \cdot \sin \angle ACD \\
 &= \frac{1}{2} (AB + CD) AC \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{4} (12 - x) x \quad (\because AB + CD + AC = 12) \\
 &= -\frac{1}{4} (x - 6)^2 + 9
 \end{aligned}$$

を得る。よって S は $x = 6$ で最大値 9 をとる。

(2)(a)



$\angle BAD, \angle DCB$ は円に内接する四角形の向かい合う角であるから、

$$\begin{aligned}
 \angle BAD + \angle DCB &= \pi \\
 \Leftrightarrow (\angle BAC + \angle CAD) + (\angle DCA + \angle ACB) &= \pi \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) + \left(\frac{\pi}{6} + \angle ACB \right) &= \pi \\
 \therefore \angle ACB &= \frac{2}{3}\pi - \theta
 \end{aligned}$$

が得られ、これより、

$$\begin{aligned}
 \angle ABC &= \pi - \angle BAC - \angle ACB \\
 &= \pi - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \\
 &= \frac{\pi}{6} + \theta
 \end{aligned}$$

である。

(2)(b)

$\triangle ABC$ についての正弦定理より、

$$\begin{aligned}
 \frac{AB}{\sin \angle ACB} &= \frac{AC}{\sin \angle ABC} \\
 \Leftrightarrow AB &= \frac{\sin \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} x = \frac{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta} x \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。また、

$$\sin \angle ADC = \sin (\pi - \angle ABC) = \sin \angle ABC$$

であるから、 $\triangle ADC$ についての正弦定理より、

$$\begin{aligned}
 \frac{CD}{\sin \angle CAD} &= \frac{AC}{\sin \angle ADC} \\
 \Leftrightarrow CD &= \frac{\sin \theta}{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)} x = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta} x \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。よって①, ②より、

$$\begin{aligned}
 AB + CD + AC &= 12 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta + 2 \sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta} + 1 \right) x &= 12 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1) x &= 12 \\
 \Leftrightarrow 2x &= 12(\sqrt{3} - 1) \\
 \therefore x &= 6\sqrt{3} - 6
 \end{aligned}$$

を得る。

3

【解答】

	(あ)	(い)	(う)
(1)	-2	$\frac{1+2\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1-2\sqrt{3}i}{2}$
(2)	(え)		
	$-\sqrt{3}y+3$		
(3)	(お)	(か)	
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	
(4)	(き)		
	20		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} 4z^3+4z^2+5z+26 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+2)(4z^2-4z+13) &= 0 \\ \Leftrightarrow z = -2, \frac{2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot 13}}{4} &= -2, \frac{1 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$z_1 = -2, z_2 = \frac{1+2\sqrt{3}i}{2}, z_3 = \frac{1-2\sqrt{3}i}{2}$$

となる。

(2)

点 P を表す値を z_4 とすると、(1)より直線 BC 上の点は実数部が $\frac{1}{2}$ となるので、 z_4 は実数 t を用

いて、

$$z_4 = \frac{1}{2} + ti$$

と表せる。すると、点 Q を表す値は、

$$\begin{aligned} x+yi &= z_1 + (z_4 - z_1) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -2 + \left(\frac{5}{2} + ti \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \left(-2 + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \left(\frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}t \right)i \\ &= \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \left(\frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}t \right)i \end{aligned}$$

となる。よって、

$$x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad \dots \textcircled{1}$$

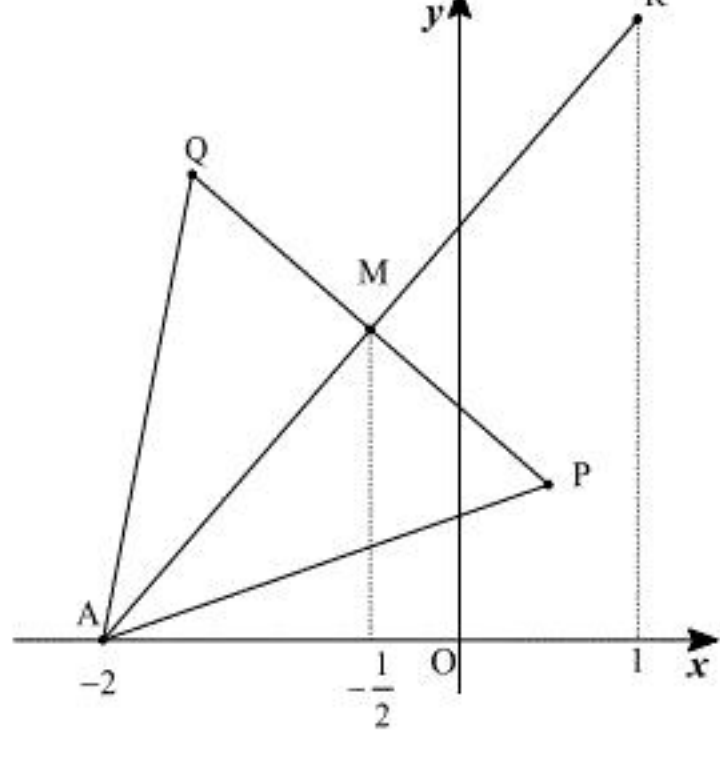
$$y = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}t \Leftrightarrow t = 2y - \frac{5}{2}\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるので、②を①に代入して、

$$x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2y - \frac{5}{2}\sqrt{3} \right) = -\sqrt{3}y + 3$$

となる。

(3)



$AP = AQ$, $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ であるから、 $\triangle APQ$ は正三角形である。よって、AR の中点を M とする

と M は PQ 上に存在し、

$$\angle PAM = \frac{\pi}{6}, \quad AM = \cos \frac{\pi}{6} AP = \frac{\sqrt{3}}{2} AP$$

となる。よって、M を表す複素数は、

$$\begin{aligned} z_1 + (z_4 - z_1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) &= -2 + \left(\frac{5}{2} + ti \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}t + \left(\frac{3}{4}t + \frac{5\sqrt{3}}{8} \right)i \end{aligned}$$

となる。R の実部が1であるとき、M の実部は、

$$\frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

であるから、

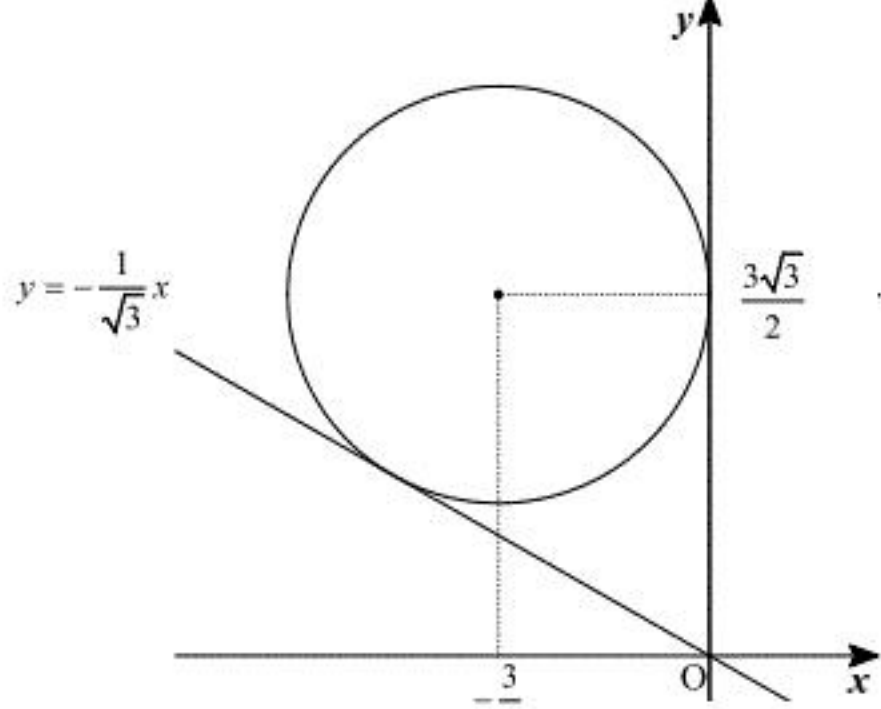
$$-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

となる。

(4)



$Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円に接するような原点を通る直線は2本あり、一方は y

軸である。もう一方を $y = sx$ とすると、この直線と $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ の距離が $\frac{3}{2}$ となればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{\left| s \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + (-1) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \right|}{\sqrt{s^2+1}} &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \frac{\frac{9}{4}s^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}s + \frac{27}{4}}{s^2+1} &= \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow s^2+1 &= s^2+2\sqrt{3}s+3 \\ \therefore s &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $w \neq 0$ であるから、

$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる。上図より $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから、各 θ に対応する w の個数は、

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } 1 \text{ つ} \\ \theta = \theta' \left(\frac{\pi}{2} < \theta' < \frac{5}{6}\pi \right) \text{ のとき, } 2 \text{ つ} \end{cases}$$

となる。また、ド・モアブルの公式より、

$$w^{29} = r^{29}(\cos 29\theta + i \sin 29\theta)$$

であるから、 w^{29} が実数となるのは、

$$\sin 29\theta = 0 \Leftrightarrow 29\theta = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と表されるときである。 θ のとりうる値の範囲が $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ であることから、

$$\frac{29}{2}\pi \leq 29\theta \leq \frac{145}{6}\pi$$

が成り立つため、条件を満たすような整数 n は、

$$n = 15, 16, \dots, 24$$

の10個存在する。これら各 n に対応する θ の値は、

$$\frac{\pi}{2} < \theta \left(= \frac{n}{29}\pi \right) < \frac{5}{6}\pi$$

を満たすので、各 n に対応する w は2個ずつ存在する。以上より、 w^{29} が実数となるような w の個数は、

$$10 \cdot 2 = 20 \text{ 個}$$

であることが分かる。