

G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。また、 内の英文字にあてはまる + か - の記号を解答用マークシートにマークせよ。ただし、0 は +0 で表すものとする。また、分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形で表すものとする。なお、問題文中の △ は既出の △ を表す。

(40 点)

(1) x の 2 次方程式 $x^2 + (a+1)x + a^2 + a - 1 = 0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は

$$\boxed{(a)} \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \leq a \leq \boxed{(b)} \boxed{\text{ウ}}$$

である。

a がこの範囲の値をとるとき、上の 2 次方程式の解 x がとり得る値の範囲は

$$\boxed{(c)} \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \leq x \leq \boxed{(d)} \boxed{\text{カ}}$$

である。

方程式 $x^2 + (a+1)x + a^2 + a - 1 = 0$ を満たす整数の組 (x, a) は全部で キ 個ある。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

- (2) 座標平面において、放物線 $C: y = x^2$ 上に異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ をとり、それぞれの点における接線を順に ℓ , m , n とする。また、 m と n の交点を P , n と ℓ の交点を Q , ℓ と m の交点を R とする。

R の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}b, \boxed{\text{シ}}ab \right)$ である。

R から直線 PQ に下した垂線の方程式は

$$x + \boxed{\text{ス}}cy = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}b + \boxed{\text{ツ}}abc$$

であり、 Q から直線 PR に下した垂線の方程式は

$$x + \boxed{\text{テ}}by = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}c + \boxed{\text{ネ}}abc$$

である。

$\triangle PQR$ の垂心の y 座標は、 a, b, c の値にかかわらず、つねに $\boxed{\text{(e)}} \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 以下において、 e は自然対数の底であり、 $2 < e < 3$ を満たす。

座標平面上で曲線 $y = e^x$ と直線 $y = \frac{x}{e} + 1$ で囲まれた図形の面積を S とする。

方程式 $e^x = \frac{x}{e} + 1$ の 0 でない実数解を a とすると

$$S = \boxed{\text{f}} \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \frac{a^2}{e} \boxed{\text{g}} \boxed{\text{ヘ}} \frac{a}{e} \boxed{\text{h}} \boxed{\text{ホ}} a$$

が成り立つ。また $\int_{-1}^0 e^x dx = \boxed{\text{マ}} - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{e}$ なので、 a の値を計算しなくても

$$\boxed{\text{ム}} < S < \boxed{\text{ム}} + 1$$

であることがわかる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a, b は実数の定数で, $\cos a > 0$ とする。 (30 点)

(1) x の 2 次方程式

$$x^2 - 2x \cos a \cos b + \cos^2 a = 0$$

の解を極形式で表せ。

(2) x の 2 次方程式

$$x^2 \cos^2 a - 2x \cos a \cos b + 1 = 0$$

の解を極形式で表せ。

(3) a, b が $-\frac{\pi}{3} \leq a \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq b < 2\pi$ の範囲を動くとき, (1) の解がとり得る値全体の集合は, 複素数平面上のある領域 S_1 になる。また, (2) の解がとり得る値全体の集合は, ある領域 S_2 になる。 S_1 と S_2 を図示せよ。

(4) S_1, S_2 は (3) で定めた領域とする。2 つの複素数 α, β について, α が S_1 上, β が S_2 上を動くとき, $\alpha\beta$ がとり得る値全体の集合は, 複素数平面上のある領域 S になる。 S を図示せよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 $f(x) = \sin(\pi \cos x)$ で定められた関数 $f(x)$ に対して、次の問いに答えよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。 (30 点)

(1) $f(\pi + x) - f(\pi - x)$ の値を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $f(x) = 0$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3) $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $f'(x) = 0$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(4) $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ の値を求めよ。

(5) $\frac{\int_0^{2\pi} |f(x)| dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx}$ の値を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

