平成29年度　　〔試験時間　100分〕

Z 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ユ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{カ}$ などは既出の $\boxed{カ}$ を表す。

(40 点)

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = 2a_n + 9^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

まず，$b_n = \dfrac{a_n}{9^n}$ とおくことにより

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{ア}\, b_n + \boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

となる。次に，$c_n = b_n - \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ とおくと

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\, c_n$$

となる。よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1 = \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$，公比 $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ の等比数列である。以上より，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{シ} \times \boxed{ス}^{n+\boxed{セ}} + \boxed{ソ}^{2n}}{\boxed{タ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) **(a)** すべての実数 α に対し，

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\boxed{チ}}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\boxed{ツ}}\right)$$

が成り立つ。よって α が $\frac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

$$\sin\alpha + \cos\alpha$$

は，$\alpha = \frac{\pi}{\boxed{テ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{ト}}$ をとり，$\alpha = \frac{\pi}{\boxed{ナ}}$ で最小値 $\boxed{ニ}$ をとる。

(b) 実数 α, β が $\frac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

は，$\alpha = \frac{\pi}{\boxed{ヌ}}$ かつ $\beta = \frac{\pi}{\boxed{ネ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{ノ}}$ をとる。

右のページは白紙です。

(3) 1個のさいころを3回投げ，出た目の数を順に a, b, c とする。

積 abc を n とおく。

(a) n が素数となる確率は $\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}\boxed{フ}}$ である。ただし，素数とは2以上の自然数で，1とそれ自身以外に正の約数をもたない数である。

(b) n が2の倍数，5の倍数，10の倍数となる確率は，

それぞれ $\dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$，$\dfrac{\boxed{マ}\boxed{ミ}}{\boxed{ム}\boxed{メ}\boxed{モ}}$，$\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 平面上に $\triangle$OAB をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。
t を正の実数とし，点 P, Q は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点とする。
また，2 直線 BP, OQ の交点を R とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\vec{a}$, $\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BR}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\ell\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす実数 k, ℓ を，t を用いて表せ。

(3) $\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OBR の面積を S_2 とおく。$\dfrac{S_2}{S_1}$ を t を用いて表せ。
また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 関数 $f(x)$ と曲線 C を

$$f(x) = \frac{4}{x}, \qquad C : y = f(x)$$

で定める。定数 a を $a > 2$ を満たすものとして，C 上の 2 点 $\mathrm{Q}(2,\ f(2))$，$\mathrm{A}(a,\ f(a))$ をとる。点 A における曲線 C の接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする。線分 AB，BQ，および曲線 C の弧 QA で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

(1) 接線 ℓ の方程式を，a を用いて表せ。また，b を a を用いて表せ。

(2) V を a を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{a \to 2+0} \frac{V}{(a-2)^2}$ の値を求めよ。

(4) $V = 12\pi$ となるとき，a の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。