

S 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 ~ 5 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1 e を自然対数の底とする。

(1) $f(x) = \frac{e^{2x}}{3x}$ ($x \neq 0$) とする。

(a) 関数 $f(x)$ は $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ で極小値 $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}} e^{\text{オ}}$ をとる。

(b) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, f(3))$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\text{カ}}{\text{キク}} e^{\text{ケ}} x - \frac{\text{コ}}{\text{サ}} e^{\text{シ}}$$

である。

(2) a を定数とする。方程式

$$e^{4x-11} - 2ax^3 + 12ax^2 - 24ax + 16a = 0$$

が実数解をもつのは

$$a < \text{ス}, \quad a \geq \frac{\text{セソ}}{\text{タチ}}$$

のときである。

(20 点)

右のページは白紙です。

- 2 $AB = 3$, $BC = 7$, $CA = 5$ である $\triangle ABC$ の内心を I とし、直線 AI と辺 BC の交点を P とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり、内接円の半径は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$,

外接円の半径は $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(2) $\sin \angle CAP = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ であるから、線分 CI の長さは $\sqrt{\boxed{\text{セ}}\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3) 線分 BP と CP の長さの比の値 $\frac{BP}{CP}$ と、線分 AI と PI の長さの比の値 $\frac{AI}{PI}$ は、それぞれ $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ と $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(20 点)

右のページは白紙です。

- 3** a を定数とする。 xy 平面上において、中心が $(a, 0)$ 、半径が 2 である円を C とし、直線 $y = -4$ に接し、円 C と外接するような円の中心の軌跡を T とする。軌跡 T と y 軸との共有点を P とし、 T と x 軸によって囲まれた領域 (境界線を含む) を D とする。

- (1) 領域 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\frac{\text{アイウ}}{\text{エ}}\pi$ である。

- (2) 点 P の座標は

$$\left(0, \frac{\text{オ}}{\text{カキ}} a^{\text{ク}} - \text{ケ} \right)$$

であるから、領域 D の境界線と y 軸が共有点をもつのは

$$-\text{コ} \leq a \leq \text{サ} \quad \dots\dots\dots (*)$$

のときである。

- (3) a が $(*)$ の範囲にあるとき、軌跡 T と x 軸との共有点のうち、 x 座標が一番大きい点を Q とする。 a が $(*)$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過する部分の面積は シス である。ただし、 $P = Q$ のとき、線分 PQ は点 Q のこととする。

(20 点)

右のページは白紙です。

4

赤球と白球がそれぞれ 1 個ずつ入っている袋 A と、赤球が 3 個と白球が 5 個入っている袋 B がある。袋 A の中をよくかき混ぜてから球を 1 個取り出して袋 B に入れ、続いて袋 B の中をよくかき混ぜてから球を 1 個取り出して袋 A に入れるという試行を、袋 A の中が赤球のみになるまで繰り返す。赤球のみになったらそれ以上試行を繰り返さず終了する。 n を自然数とする。 n 回目の試行が行われ、かつ、それを終えたときに袋 A の中に赤球、白球がそれぞれ 1 個ずつ入っている確率を p_n 、白球が 2 個入っている確率を q_n とする。

(1) $p_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $q_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}} \mid \boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, p_{n+1} , q_{n+1} を p_n , q_n を用いて表すと

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} p_n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} q_n, \quad q_{n+1} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}} \mid \boxed{\text{シ}}} p_n + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} q_n$$

となる。

(3) α を正の定数として, $r_n = p_n + \alpha q_n$, $s_n = p_n - \alpha q_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

数列 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ がともに等比数列となるのは,

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \sqrt{\boxed{\text{チ}} \mid \boxed{\text{ツ}}}$$

のときであり, そのとき, $\{r_n\}$ の公比は

$$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}} \mid \boxed{\text{ネ}}}$$

である。

(4) ちょうど 4 回目の試行で終了する確率は, $\frac{\boxed{\text{ノ}} \mid \boxed{\text{ハ}} \mid \boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}} \mid \boxed{\text{ヘ}} \mid \boxed{\text{ホ}} \mid \boxed{\text{マ}}}$ である。

(20 点)

右のページは白紙です。

5 p を $0 < p < 1$ を満たす定数とし、 $f(x) = x^{p-1} + \frac{1}{x^p}$ ($x > 0$) とする。文中の $\log$ は自然対数を表す。

(1) $g(x) = 2f(x)$ とし、曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(1, g(1))$ における接線を ℓ とする。

(a) ℓ の方程式は $y = -\boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}$ である。

(b) 曲線 $y = g(x)$ 、接線 ℓ および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{p} \left(\boxed{\text{エ}}^p - \boxed{\text{オ}} \right) + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{カ}} - p} \left(\boxed{\text{エ}}^{1-p} - \boxed{\text{キ}} \right) - \boxed{\text{ク}}$$

である。 p が $\frac{1}{9} \leq p \leq \frac{4}{5}$ の範囲を動くとき、 S_1 は $p = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき最小値

をとり、 $p = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最大値をとる。

(2) $h(x) = (f(x))^2$ とする。曲線 $y = h(x)$ 、直線 $x = 1$ 、 $x = 5$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とおくと、 $p \neq \frac{1}{2}$ のとき

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}^p - \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ソ}}^p}{1 - \boxed{\text{タ}}^p} + \boxed{\text{チ}} \log \boxed{\text{ツ}}$$

であり、 $\lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} S_2 = \boxed{\text{テ}} \log \boxed{\text{ト}}$ である。

(20 点)

右のページは白紙です。

