

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 以下の問いに答えなさい。

(a) 等式 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす実数 x, y を考える。

$u = 3x + y + 3$, $v = 2x - 2y + 3$ とするとき,

$\frac{u}{v}$ の最大値は ア + $\sqrt{\text{イ} \text{ ウ}}$ であり, 最小値は エ - $\sqrt{\text{オ} \text{ カ}}$ である。

(b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たす実数 x, y を考える。

$u = 4x - 6y + 3$, $v = 4x + 3y - 1$ とするとき,

$u^2 + v^2$ の最大値は キ ク であり, 最小値は $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ である。

右のページは白紙です。

(2) 以下の問いに答えなさい。

(a) 実数 x の関数 $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \sin 2x - \frac{3}{4} \sin^2 x$ を考える。

$f(x)$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり、最小値は $-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とすると、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x f'(x) dx$ の値は $\frac{\pi - \boxed{\text{オ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(b) 実数 x の関数 $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8} a \sin 2x - \frac{3}{4} a \sin^2 x + \frac{3}{4} a + b$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を考える。ただし、 a, b は実数の定数で、 $a > 0$ とする。

$a = \boxed{\text{ク}}$, $b = -\frac{\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき、 $g(x)$ は $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$ で最大値 $\frac{3}{2}$,

$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ で最小値 $-\frac{15}{2}$ をとる。

右のページは白紙です。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) において初項 $a_1 = \frac{1}{4}$ とする。また、初項から第 n 項までの和 S_n が、次の関係式を満たすとする。

$$S_n = n(3n - 2)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(a) $a_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}}$ である。

(b) $a_4 = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}} a_3$ である。

(c) 一般項 a_n を n を用いて表すと、 $a_n = \frac{1}{\boxed{\text{キ}} n^2 - \boxed{\text{ク}} n - \boxed{\text{ケ}}}$ である。

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right) a_k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は解答用紙 2 に記入しなさい。空欄 (あ) ~ (か) については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

2 次の 2 つの条件を満たす四角形 ABCD を考える。

- $\angle BAC = \angle ACD = \frac{\pi}{6}$
- $AB + CD + AC = 12$

以下、 $AC = x$ とおく。

(25 点)

(1) 四角形 ABCD の面積 S を x の式で表すと $S =$ (あ) である。 x を $0 < x < 12$ の範囲で動かすとき、 S は $x =$ (い) で最大値 (う) をとる。

(2) 四角形 ABCD が円に内接するときを考える。

(a) $\angle CAD = \theta$ とおく。 $\angle ACB$ と $\angle ABC$ を θ の式で表すと

$\angle ACB =$ (え), $\angle ABC =$ (お) である。

(b) $x =$ (か) である。なお、(か) の値を導く過程も解答用紙の所定の場所に書きなさい。

右のページは白紙です。

問題 3 の解答は解答用紙 3 に記入しなさい。空欄 (あ) ~ (き) については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

3 3 次方程式

$$4z^3 + 4z^2 + 5z + 26 = 0$$

は 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつ。実数解を z_1 , 2 つの虚数解のうち虚部が正のものを z_2 , 負のものを z_3 とする。ただし, 虚数単位を i で表す。

(25 点)

(1) 方程式の解は $z_1 = \boxed{\text{(あ)}}$, $z_2 = \boxed{\text{(い)}}$, $z_3 = \boxed{\text{(う)}}$ である。

次に, 複素数平面上に, z_1 を表す点 A, z_2 を表す点 B, z_3 を表す点 C をとる。また, 2 点 B, C を通る直線上に点 P をとる。点 A を中心に点 P を反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を Q とする。以下 (2), (3), (4) では点 Q を表す複素数を $x + yi$ とする。ただし, x と y は実数とする。

(2) x を y の式で表すと $x = \boxed{\text{(え)}}$ である。

2 点 P, Q を通る直線に関して点 A と対称な点を R とする。以下 (3), (4) では点 R を表す複素数の実部が 1 である場合を考える。

(3) $x = \boxed{\text{(お)}}$, $y = \boxed{\text{(か)}}$ である。なお, (お), (か) の値を導く過程も解答用紙の所定の場所書きなさい。

(4) 点 Q を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円周上の点を S とする。点 S を表す複素数を w とするとき, w^{29} が実数となるような w の個数は (き) 個である。なお, (き) の値を導く過程も解答用紙の所定の場所書きなさい。

右のページは白紙です。