

(1)

xy 平面上の曲線 $y = x^2 + 2(t-3)x + 1$ のグラフは、下に凸の放物線であるから、条件①は
条件①

$$\Leftrightarrow 2 \text{ 次方程式 } x^2 + 2(t-3)x + 1 = 0 \text{ が実数解を持たない}$$

$$\Leftrightarrow 2 \text{ 次方程式 } x^2 + 2(t-3)x + 1 = 0 \text{ の判別式 } D_1 \text{ について } D_1 < 0 \text{ が成立する}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D_1}{4} = \right) (t-3)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 < t < 4 \quad \dots \textcircled{1}'$$

と同値変形できる。したがって、求める t のとりうる値の範囲は $2 < t < 4$ となる。

(答) $2 < t < 4$

(2)

(1)と同様に考えることで、条件②は

条件②

$$\Leftrightarrow 2 \text{ 次方程式 } x^2 - 2(t-a)x + 4 - b^2 = 0 \text{ が実数解を持たない}$$

$$\Leftrightarrow 2 \text{ 次方程式 } x^2 - 2(t-a)x + 4 - b^2 = 0 \text{ の判別式 } D_2 \text{ について } D_2 < 0 \text{ が成立する}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D_2}{4} = \right) \{-(t-a)\}^2 - (4 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (t-a)^2 < 4 - b^2 \quad \dots \textcircled{2}'$$

と同値変形できる。したがって、①'かつ②'を満たす実数 t が存在するような正の整数 a, b の条件を求めればよいことになる。

まず、②'を満たす実数 t が存在するための必要条件として

$$4 - b^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < b < 2$$

を満たさなければならない。ここで、 b は正の整数であることから $b = 1$ に限られる。逆に、 $b = 1$ のとき

①'かつ②'を満たす実数 t が存在する

$$\Leftrightarrow 2 < t < 4 \text{ かつ } (t-a)^2 < 3 \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \text{区間 } 2 < t < 4 \text{ と区間 } a - \sqrt{3} < t < a + \sqrt{3} \text{ が共通部分を持つ}$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{3} < 4 \text{ かつ } 2 < a + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < a < 4 + \sqrt{3}$$

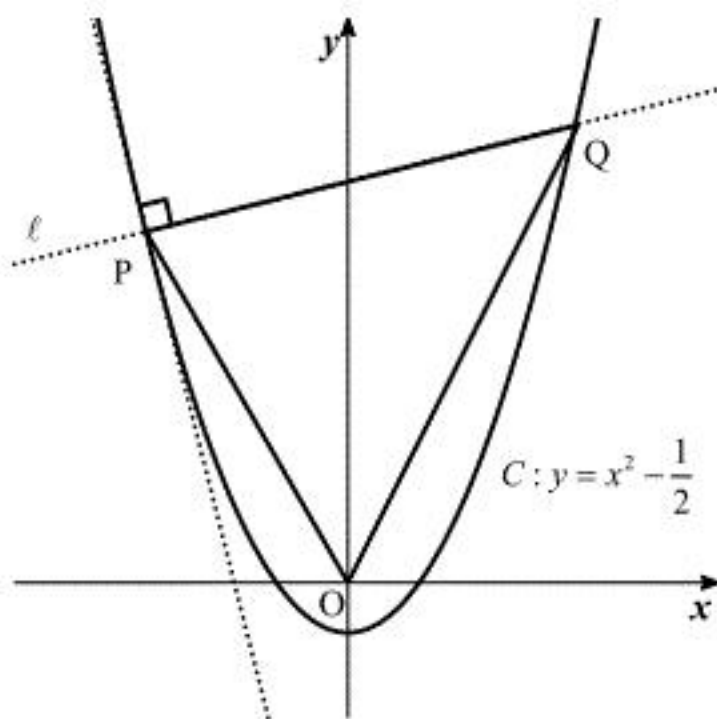
となる。さらに、 $1 < \sqrt{3} < 2$ であることから、求める正の整数 a, b の組 (a, b) は

$$(a, b) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$$

の 5 組であることがわかる。

(答) $(a, b) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$

(1)



点P, Qの x 座標を p, q とすると, 点P, Qの座標は $P\left(p, p^2 - \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(q, q^2 - \frac{1}{2}\right)$ となるから,

$\triangle OPQ$ の面積 S_1 は, 座標平面上における三角形の面積公式より

$$S_1 = \frac{1}{2} \left| p \left(q^2 - \frac{1}{2} \right) - q \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \left(pq + \frac{1}{2} \right) (q - p) \right| \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで, 放物線 C の導関数は

$$y' = 2x$$

であることから, 点Pにおける接線の傾きは $2p$ であるため, 法線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{2p}(x - p) + \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\because p \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。点P, Qは放物線 C と法線 ℓ の交点であるから, ②より, p, q は連立方程式

$$x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2p}(x - p) + \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2p}x - p^2 - \frac{1}{2} = 0$$

の解であり, 2次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} p + q = -\frac{1}{2p} \\ pq = -p^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。よって, ③より q は p を用いて

$$q = -p - \frac{1}{2p} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せることがわかり, ①, ③, ④より, S_1 は p を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \left| \left(pq + \frac{1}{2} \right) (q - p) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(-p^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(-p - \frac{1}{2p} - p \right) \right| \\ &= \frac{p^2}{2} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \quad (\because p < 0) \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{p^2}{2} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)$$

(2)

線分PQと C で囲まれた図形の面積 S_2 は④より, p を用いて

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_p^q \left\{ \left(-\frac{1}{2p}x + p^2 \right) - \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_p^q -(x - p)(x - q) dx \\ &= \frac{1}{6}(q - p)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)^3 \end{aligned}$$

と表せる。したがって, (1)で求めた S_1 に対し, $S_2 = 12S_1$ となるような条件は

$$\begin{aligned} S_2 &= 12S_1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)^3 &= 12 \cdot \frac{p^2}{2} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \left\{ \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)^2 - 36p^2 \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \left\{ \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) - 6p \right\} \left\{ \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) + 6p \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \left(-8p - \frac{1}{2p} \right) \left(4p - \frac{1}{2p} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで, $p < 0$ より, $-2p - \frac{1}{2p} > 0$, $-8p - \frac{1}{2p} > 0$ であるから, $4p - \frac{1}{2p} = 0$ を満たす p

の値を求めればよく, この方程式を解くと

$$\begin{aligned} 4p - \frac{1}{2p} = 0 &\Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{8} \\ \therefore p &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\because p < 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3)

$\triangle PQR$ について, 点Pが点Oと一致するように平行移動させたとき, 点Q, Rの移動先の点Q', R'の座標は, それぞれ

$$\text{点Q}' : \left(q, q^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(p, p^2 - \frac{1}{2} \right) = \left(q - p, q^2 - p^2 \right)$$

$$\text{点R}' : \left(\frac{3}{2}p, 2p^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(p, p^2 - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{p}{2}, p^2 \right)$$

となる。ここで, $\triangle PQR$ の面積 S_3 と $\triangle OQ'R'$ の面積は一致するから, (1)と同様にして, S_3 は

④より, p を用いて

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} \left| (q - p)p^2 - \frac{p}{2}(q^2 - p^2) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{p}{2}(q - p) \{ 2p - (q + p) \} \right| \\ &= -\frac{p}{4} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)^2 \quad \left(\because p < 0, q = -p - \frac{1}{2p} \right) \end{aligned}$$

と表すことができる。したがって, (1)で求めた S_1 に対し, $S_3 = 4S_1$ となるような条件は

$$\begin{aligned} S_3 &= 4S_1 \\ \Leftrightarrow -\frac{p}{4} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right)^2 &= 4 \cdot \frac{p^2}{2} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \\ \Leftrightarrow -\frac{p}{4} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \left\{ \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) + 8p \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{p}{4} \left(-2p - \frac{1}{2p} \right) \left(6p - \frac{1}{2p} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで, $p < 0$ より, $-\frac{p}{4} > 0$, $-2p - \frac{1}{2p} > 0$ であるから, $6p - \frac{1}{2p} = 0$ を満たす p の値

を求めればよく, この方程式を解くと

$$\begin{aligned} 6p - \frac{1}{2p} = 0 &\Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{12} \\ \therefore p &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\because p < 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(1)

2 次の基本対称式 u, v について

$$u = x + y, v = xy \quad \dots \textcircled{1}$$

とおく。このとき、問題文の条件

$$x^2 + xy + y^2 = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす実数 x, y が存在するための u, v に関する条件は2 次方程式 $t^2 - (x+y)t + xy = 0$ が実数解を持ち、①、②を満たす実数 x, y が存在する $\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ の判別式 D が $D \geq 0$ を満たし、かつ $u^2 - v = 9$ を満たす

$$\Leftrightarrow u^2 - 4v \geq 0 \quad \text{かつ} \quad u^2 - v = 9 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $x+y(=u)$ のとりうる値の範囲は、③を満たす v が存在するための条件を求めればよく

$$\textcircled{3} \text{ を満たす実数 } v \text{ が存在する} \Leftrightarrow u^2 - 4(u^2 - 9) \geq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{3} \leq u \leq 2\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -2\sqrt{3} \leq x+y \leq 2\sqrt{3}$$

(2)

問題文で与えられた式は、①より、基本対称式 u, v で表すと

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x+y) - (x+y)^2 + (x+y) \\ &= uv - u^2 + u \end{aligned}$$

となる。ここで、 $w = uv - u^2 + u$ とおくと、③の条件のもとで w のとりうる値の範囲を求めればよく

$$w = uv - u^2 + u \quad \text{かつ} \quad \textcircled{3} \text{ を満たす実数 } u, v \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow w = u(u^2 - 9) - u^2 + u \quad \text{かつ} \quad \textcircled{4} \text{ を満たす実数 } u \text{ が存在する}$$

となる。したがって、関数 $f(u)$ を $f(u) = u(u^2 - 9) - u^2 + u$ とおくと、 $-2\sqrt{3} \leq u \leq 2\sqrt{3}$ の範囲で $f(u)$ がとりうる値の範囲を求めればよいことがわかる。関数 $f(u)$ 、導関数 $f'(u)$ は

$$\begin{aligned} f(u) &= u^3 - u^2 - 8u \\ f'(u) &= 3u^2 - 2u - 8 \\ &= (3u+4)(u-2) \end{aligned}$$

であり、 $1 < \sqrt{3} < 2$ であることに注意すると、関数 $f(u)$ の増減表は以下のようになる。

u	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(u)$		+	0	-	0	+	
$f(u)$	$f(-2\sqrt{3})$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(2\sqrt{3})$

また、各点の値について

$$f(-2\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3})^3 - (-2\sqrt{3})^2 - 8(-2\sqrt{3}) = -12 - 8\sqrt{3}$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{176}{27}$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 = -12$$

$$f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - (2\sqrt{3})^2 - 8(2\sqrt{3}) = -12 + 8\sqrt{3}$$

となる。よって、 $1 < \sqrt{3} < 2$ であることに注意すると、求める値の範囲は

$$-12 - 8\sqrt{3} \leq x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y \leq \frac{176}{27}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad -12 - 8\sqrt{3} \leq x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y \leq \frac{176}{27}$$

(1)

正 $2n$ 角形の対角線の本数を求める。 $2n$ 個の頂点から 2 個の頂点を選んで結んだ直線のうち、正 $2n$ 角形の各辺を除いたものが対角線である。ここで、 $2n$ 個の頂点から 2 個の頂点を選ぶ選び方は

$${}_{2n}C_2 = \frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 1} = n(2n-1) \text{ (通り)}$$

であり、正 $2n$ 角形の辺の数が $2n$ 本であるから、求める対角線の本数は

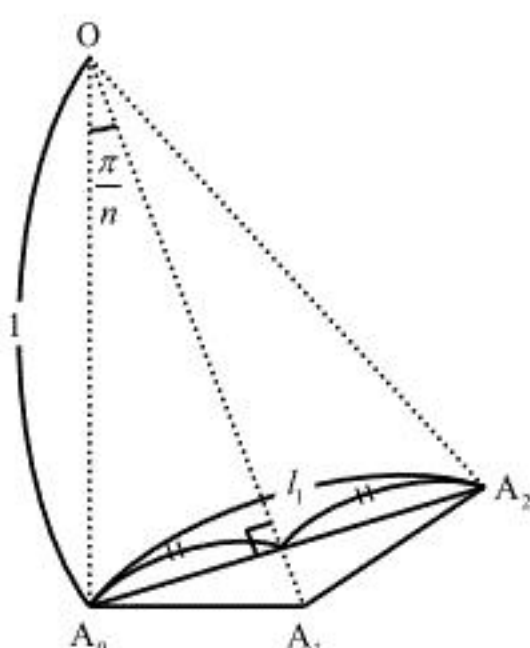
$$n(2n-1) - 2n = n(2n-3) \text{ (本)}$$

であることがわかる。

(答) $n(2n-3)$ 本

(2)

半径 1 の円の中心を O とする。正 $2n$ 角形の 1 つの頂点が A_0 であり、 A_0 から反時計回りに正 $2n$ 角形の各頂点を $A_1, A_2, \dots$ とする。このとき、最も短い対角線の長さ l_1 は $l_1 = A_0A_2$ である。



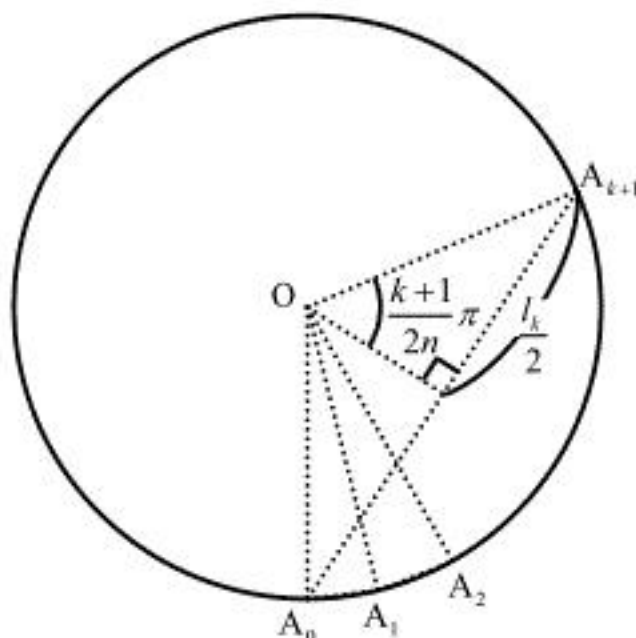
上図において、 $\triangle OA_0A_2$ は $OA_0 = OA_2 = 1$ で頂角の大きさが $\frac{2}{n}\pi$ の二等辺三角形であるから、 l_1 の長さは

$$\frac{1}{2}A_0A_2 = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow l_1 = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

と求まる。

(答) $l_1 = 2 \sin \frac{\pi}{n}$

(3)



上図において、 $\triangle OA_0A_{k+1}$ は $OA_0 = OA_{k+1} = 1$ で頂角の大きさが $\frac{k+1}{n}\pi$ の二等辺三角形であるから、(2)と同様に考えて、 l_k の長さは

$$\frac{1}{2}A_0A_{k+1} = 1 \cdot \sin \frac{k+1}{2n}\pi \Leftrightarrow l_k = 2 \sin \frac{k+1}{2n}\pi \quad \dots \textcircled{1}$$

と求まる。よって、①より、問題文で与えられた和について

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} l_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n l_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n 2 \sin \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) - \frac{2}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。ここで、区分別求積法より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 2 \sin \frac{\pi}{2} x dx = \left[-\frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = \frac{4}{\pi} \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、 $0 \leq \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) \right| \leq 1$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ 、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

であるから、②、③、④より、求める極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} l_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{4}{\pi} - 0 = \frac{4}{\pi}$$

となる。

(答) $\frac{4}{\pi}$