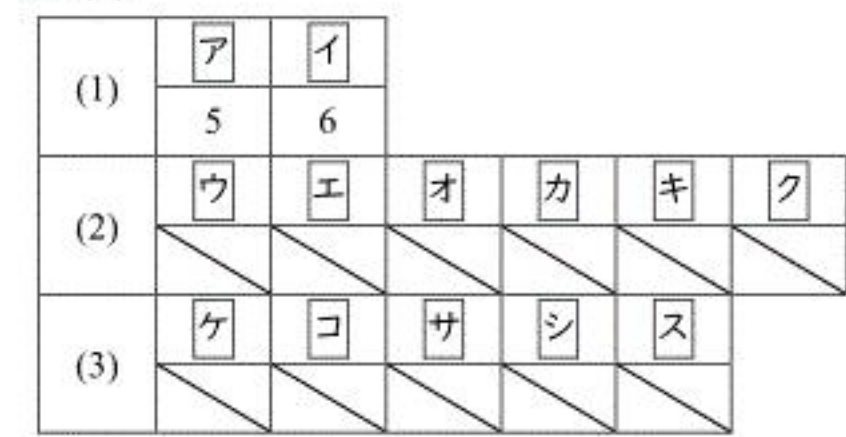


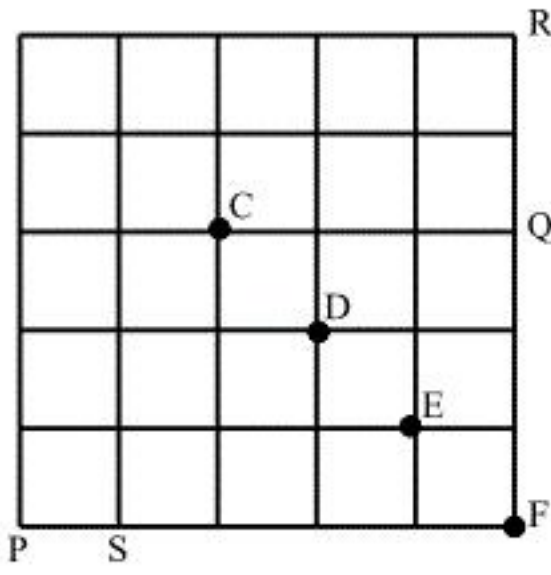
1

【解答】



【解説】

- (1) 上方向、右横方向の移動をそれぞれ $\uparrow, \rightarrow$ とすると、AがPからQへ最短で移動する方法は、 $\uparrow 3$ つと $\rightarrow 5$ つを並べて考えれば良い。同じものを含む順列であるので、Aの最短経路の総数は、
- $$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$
- となる。
- (2) AとBそれぞれがPとRから同時に同じ速さで出発するとき、2点P, Qからの距離が等しい点において出会う。すなわち、AとBが出会うのは、下図の点C, D, E, Fのいずれかである。



以下では、AとBがどの点で出会うかで場合分けして考える。

- [1] 点Cで出会うとき
- AとBが点Cで出会う場合の数は、AがCを経由する最短経路の数と、BがCを経由する最短経路の数の積で表されるので、
- $$\left(\frac{5!}{3!2!} \cdot 1\right) \left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{3!}\right) = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 4 = 400 \text{ (通り)}$$
- である。
- [2] 点Dで出会うとき
- AとBが点Dで出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$\left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!}{2!}\right) \left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!}\right) = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 1800 \text{ (通り)}$$
- である。
- [3] 点Eで出会うとき
- AとBが点Eで出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$\left(\frac{5!}{4!} \cdot \frac{3!}{2!}\right) \left(\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}\right) = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 300 \text{ (通り)}$$
- である。
- [4] 点Fで出会うとき
- AとBが点Fで出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$(1 \cdot 1)(1 \cdot 1) = 1 \text{ (通り)}$$
- である。

以上[1], [2], [3], [4]より、AとBが途中で出会う最短経路の総数は、 $400 + 1800 + 300 + 1 = 2501 \text{ (通り)}$ となる。また、AとBそれぞれがQとSに最短経路で到着する総数は、AがQに最短経路で到着する総数とBがSに最短経路で到着する総数の積で表されるので、(1)の結果も踏まえると、

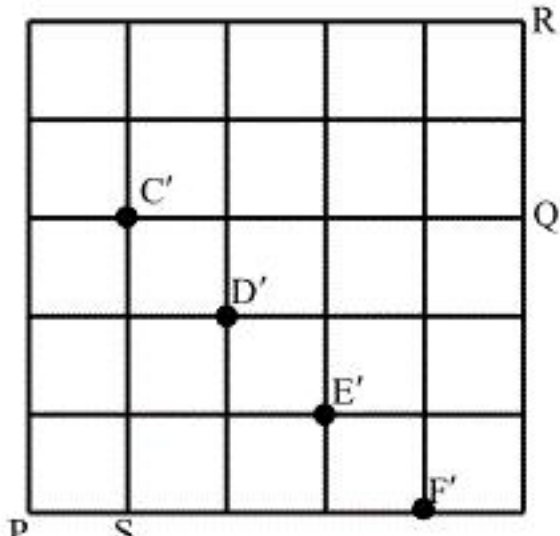
$$56 \cdot \frac{9!}{5!4!} = 56 \cdot 126 = 7056 \text{ (通り)}$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{2501}{7056}$$

となる。なお、解答欄枠数に合わないので、解答なしとする。

- (3) BがAの1.5倍の速さで移動するので、2点P, Qからの距離が1:2である点において出会う。すなわち、AとBが出会うのは、下図の点C', D', E', F'のいずれかである。



以下では、AとBがどの点で出会うかで場合分けして考える。

- [1] 点C'で出会うとき
- AとBが点C'で出会う場合の数は、AがC'を経由する最短経路の数と、BがC'を経由する最短経路の数の積で表されるので、
- $$\left(\frac{4!}{3!} \cdot 1\right) \left(\frac{6!}{4!2!} \cdot 1\right) = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 60 \text{ (通り)}$$
- である。
- [2] 点D'で出会うとき
- AとBが点D'で出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$\left(\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{3!}\right) \left(\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!}\right) = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 = 1440 \text{ (通り)}$$
- である。
- [3] 点E'で出会うとき
- AとBが点E'で出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$\left(\frac{4!}{3!} \cdot \frac{4!}{2!2!}\right) \left(\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{3!}{2!}\right) = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 3 = 1080 \text{ (通り)}$$
- である。
- [4] 点F'で出会うとき
- AとBが点F'で出会う場合の数は、[1]と同様に考えて、
- $$\left(1 \cdot \frac{4!}{3!}\right) \left(\frac{6!}{5!} \cdot 1\right) = 4 \cdot 6 = 24 \text{ (通り)}$$
- である。

以上[1], [2], [3], [4]より、AとBが途中で出会う最短経路の総数は、 $60 + 1440 + 1080 + 24 = 2604 \text{ (通り)}$ である。(2)より、AとBそれぞれがQとSに最短経路で到着する総数は7056通りであったので、求める確率は、

$$\frac{2604}{7056} = \frac{31}{84}$$

となる。なお、解答欄枠数に合わないので、解答なしとする。

(1)

初項を第1群、第2項と第3項を第2群、第4項から第6項を第3群というように群数列を定

義していくと、第 k 群には k 項含まれ、各群の $2n-1$ 番目の項は $2n-1$ 、 $2n$ 番目の項は $-\frac{1}{2^n}$ と

なる。第3250項が第 $m+1$ 群(m は非負整数)に含まれるとすると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k < 3250 &\leq \sum_{k=1}^{m+1} k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(m+1) < 3250 &\leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \\ \Leftrightarrow m(m+1) < 6500 &\leq (m+1)(m+2) \\ \therefore m &= 80\end{aligned}$$

となる。ゆえに a_{3250} は第81群に含まれる。また、

$$3250 - \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 81 = 10$$

より a_{3250} は第81群の10番目の項である。よって、

$$a_{3250} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{3250} = -\frac{1}{32}$$

(2)

123は奇数であるから第 k 群に初めて現れるとすると、それは第 k 群の123番目、すなわち第 k 群の最後の項である。よって $k=123$ である。ゆえに、 $a_n=123$ となる最小の自然数 n は、

$$n = \sum_{k=1}^{123} k = \frac{1}{2} \cdot 123 \cdot 124 = 7626$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n = 7626$$

(3)

[1] a_{5200} について

(1)と同様に計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k < 5200 &\leq \sum_{k=1}^{m+1} k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(m+1) < 5200 &\leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \\ \Leftrightarrow m(m+1) < 10400 &\leq (m+1)(m+2) \\ \therefore m &= 101 \quad (\because 101 \cdot 102 = 10302, 102 \cdot 103 = 10506)\end{aligned}$$

となり a_{5200} は第102群に含まれる。また、

$$5200 - \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot 102 = 49$$

より、 a_{5200} は第102群の49番目の項である。よって、

$$S_{5200} = (\text{初項から第101群の末項までの総和}) + \sum_{j=1}^{25} (2j-1) - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j}$$

である。

[2] a_{5150} について

(1)と同様に計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k < 5150 &\leq \sum_{k=1}^{m+1} k \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(m+1) < 5150 &\leq \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \\ \Leftrightarrow m(m+1) < 10300 &\leq (m+1)(m+2) \\ \therefore m &= 100 \quad (\because 100 \cdot 101 = 10100, 101 \cdot 102 = 10302)\end{aligned}$$

となり、 a_{5150} は第101群に含まれる。また、

$$5150 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 100$$

より、 a_{5150} は第101群の100番目の項である。よって、

$$S_{5150} = (\text{初項から第100群の末項までの総和}) + \sum_{j=1}^{50} (2j-1) - \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2^j}$$

である。

以上、[1], [2]より

$$\begin{aligned}S_{5200} - S_{5150} &= (\text{第101群の総和}) + \left(\sum_{j=1}^{25} (2j-1) - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{50} (2j-1) - \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{51} (2j-1) - \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2^j} + \sum_{j=1}^{25} (2j-1) - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=1}^{50} (2j-1) + \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2^j} \\ &= 101 + \sum_{j=1}^{25} (2j-1) - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j} \\ &= 101 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (1+49) - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j} \\ &= 726 - \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

である。ここで

$$0 < \sum_{j=1}^{24} \frac{1}{2^j} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\infty} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

であるから $S_{5200} - S_{5150}$ の整数部分は $726-1=725$ となる。

$$(\text{答}) \quad 725$$

(1)

$$f(x) = x^4 + ax^2 + 6$$

より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 2ax \\ &= 2x(2x^2 + a) \end{aligned}$$

となる。 $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ で極値を持つので、 $f'\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 0$ が必要である。よって、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + a &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{10}{4} + a &= 0 \\ \therefore a &= -5 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2x^2 - 5) \\ &= 4x\left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{aligned}$$

となり、 $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ の前後で確かに符号変化が起こり、 $f(x)$ は極値となる。

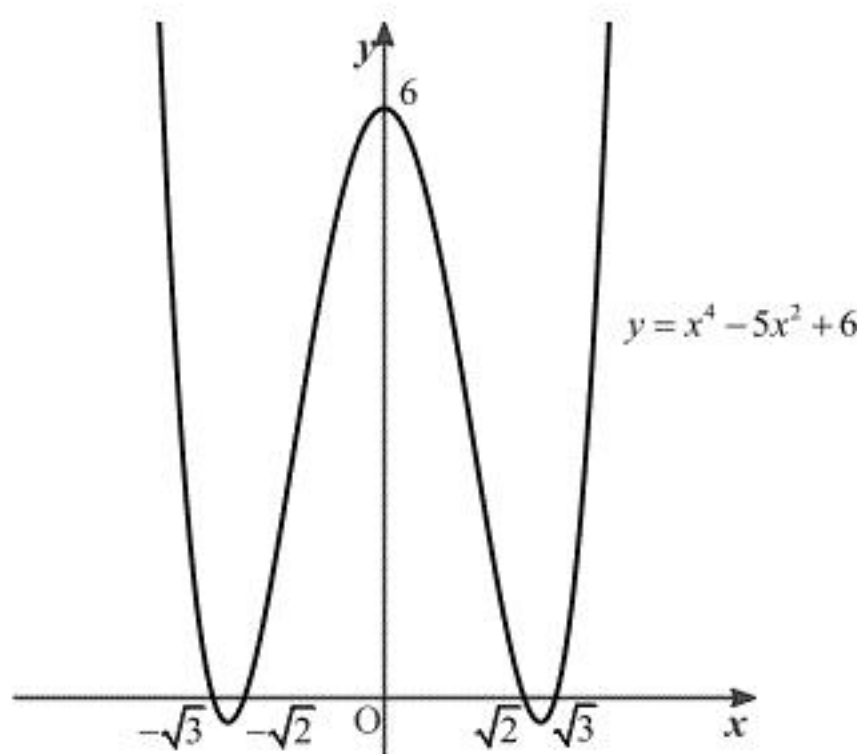
(答) $a = -5$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^2 + 6 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 - 3) \\ &= (x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。よって $y = f(x)$ を図示すると下図のようになる。

よって求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^4 - 5x^2 + 6) dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (-x^4 + 5x^2 - 6) dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 6x \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{9}{5}\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{10}{3}\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\ &= -\frac{14}{5}\sqrt{3} + \frac{52}{15}\sqrt{2} \\ &= \frac{52\sqrt{2} - 42\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{52\sqrt{2} - 42\sqrt{3}}{15}$