

【解答】

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
		1	1	9	2	7	8	4	1	8	0	5	8	3	3	3
(2)	(a)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ							
		3	4	4	6	2	4	2	6							
	(b)	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ						
		1	3	2	3	3	3	3	1	3						
(3)		ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	ワ	ヲ	ン	
		8	2	4	3	2	7	3	5	4	5	2	7	2	3	

「タ」「チ」に関しては、4, 6の組でも可

【解説】

(1)

2 次関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + c$ のグラフを F とする。放物線 F が点 $(1, 7)$ を通るとき、これを代

入することで、 c の値は

$$7 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + c \Leftrightarrow c = 11$$

と求まる。ここで、2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 11 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

となり、また、各値を代入すると

$$f(7) = \frac{49}{2} - \frac{63}{2} + 11 = 4, f(4) = \frac{16}{2} - \frac{36}{2} + 11 = 1$$

となるから、放物線 F は頂点が $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{8}\right)$ で、2 点 $(7, 4), (4, 1)$ を通ることがわかる。

この $f(x)$ を用いて、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めると、この数列は

$$a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 7, a_6 = 4, a_7 = 1, \dots$$

と、1, 7, 4 を繰り返す周期 3 の数列であることがわかるから、初項から第 20 項までの和は

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{20} &= (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{16} + a_{17} + a_{18}) + a_{19} + a_{20} \\ &= 6 \cdot (1 + 7 + 4) + 1 + 7 \\ &= 80 \end{aligned}$$

となる。また、無限級数

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

は収束して、その和 S は循環小数

$$S = 0.1741741741\dots$$

であり、これを分数に直すと

$$1000S - S = 174.1741741\dots - 0.1741741\dots \Leftrightarrow 999S = 174$$

$$\therefore S = \frac{58}{333}$$

となる。

(2)

(a)

三角関数の加法定理により

$$\sin \frac{1}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}\pi\right) = -\sin \frac{1}{12}\pi = -\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

がわかる。

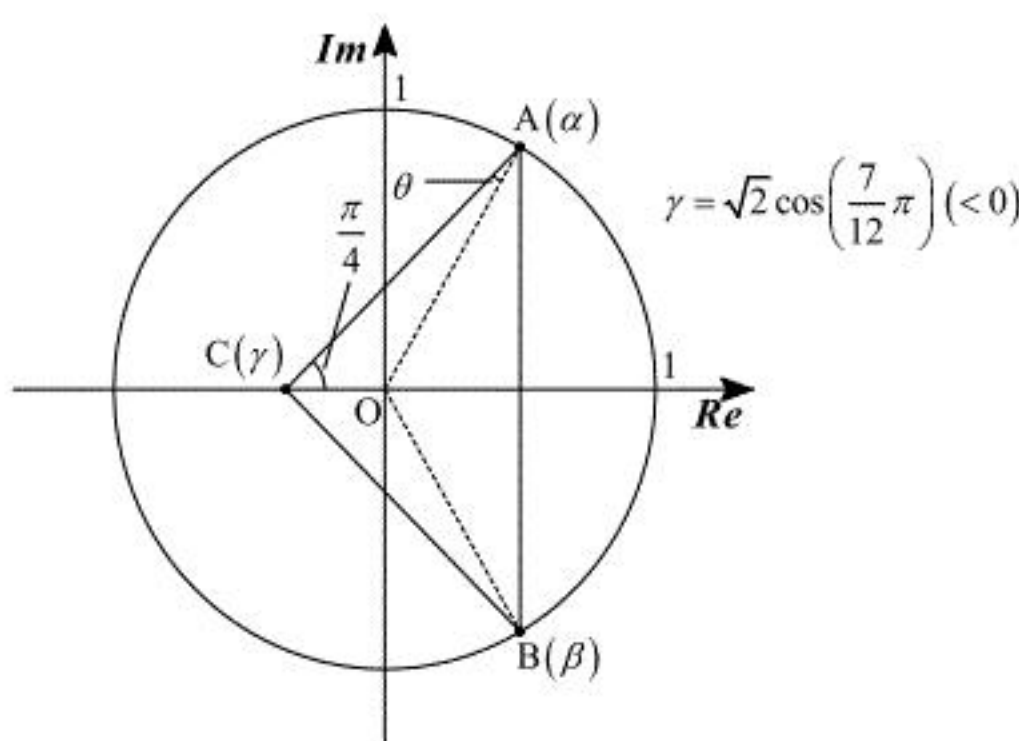
(b)

実数係数の 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の 3 つの解 α, β, γ について、それらが複素数平面上で表わす 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点

とする $\triangle ABC$ が直角三角形となるための条件を求める。



複素数平面上で α の絶対値は 1 であり、偏角 $\arg \alpha$ は $0 \leq \arg \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲にある。また、

α, β は実数係数の 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解であるから、どちらも実数であるか、もしくは互いに共役複素数となるか、のどちらかであるが、どちらも実数の場合は複素数平面上で 3 点 A, B, C が一直線上に並ぶため、三角形を成さない。したがって、 α, β は互いに共役複素数となり、このとき、上図のような位置関係となる。

さらに、上図より、 $\triangle ABC$ が直角三角形となるためには $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ となることがわかる。こ

こで、 $\triangle OAC$ に着目して、正弦定理を用いると

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{-\gamma}{\sin \theta} \Leftrightarrow \sin \theta = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \sin \theta = \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。したがって、上図より

$$\arg \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}\pi$$

であり、このとき、 $\textcircled{1}$ の左辺は

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= \left\{x - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right\} \left\{x - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right\} \left\{x - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\ &= (x^2 - x + 1) \left(x + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \\ &= x^3 + \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})x^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるから、 $a = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3}), b = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}), c = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})$ であることがわかる。

(3)

座標空間に 2 点 $A(-3, 4, 2\sqrt{3}), B(0, 0, \sqrt{3})$ をとり、座標空間の xy 平面上で原点 $O(0, 0, 0)$ を

中心とする半径 1 の円の周上の動点を P とする。動点 P はこの円周全体を動くから、この点の座標は $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ (θ は実数) と表せる。このとき、各ベクトルの成分表示は

$$\overrightarrow{BA} = (-3, 4, \sqrt{3}), \overrightarrow{BP} = (\cos \theta, \sin \theta, -\sqrt{3})$$

となるから、内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$ は

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = -3 \cos \theta + 4 \sin \theta - 3$$

となることがわかる。ここで、三角関数の合成を行うことで

$$-3 \cos \theta + 4 \sin \theta = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \left(\sin \theta \cdot \frac{4}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} + \frac{(-3)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \cdot \cos \theta \right) = 5 \sin(\theta + \alpha)$$

$$(\text{ただし、実数 } \alpha \text{ は } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = -\frac{3}{5} \text{ を満たす})$$

と表せるから、内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = 5 \sin(\theta + \alpha) - 3$ のとり得る値の範囲は

$$-8 \leq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 2$$

であることがわかる。また、線分 AP の長さについて、 $\overrightarrow{AP} = (\cos \theta + 3, \sin \theta - 4, -2\sqrt{3})$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= (\cos \theta + 3)^2 + (\sin \theta - 4)^2 + (-2\sqrt{3})^2 \\ &= 6 \cos \theta - 8 \sin \theta + 38 \\ &= -2(-3 \cos \theta + 4 \sin \theta) + 38 \\ &= -2 \cdot 5 \sin(\theta + \alpha) + 38 \\ &= -10 \sin(\theta + \alpha) + 38 \end{aligned}$$

となるから、求める値は

$$\text{線分 } AP \text{ の長さの最大値: } \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \text{ 線分 } AP \text{ の長さの最小値: } \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

であり、線分 AP の長さが最大となるのは

$$\begin{aligned} -10 \sin(\theta + \alpha) + 38 &= 48 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta + \alpha) = 0 \\ \sin(\theta + \alpha) = -1 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} \cos \theta = \cos\{(\theta + \alpha) - \alpha\} = \cos(\theta + \alpha) \cos \alpha + \sin(\theta + \alpha) \sin \alpha = \frac{3}{5} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases} \\ \sin \theta = \sin\{(\theta + \alpha) - \alpha\} = \sin(\theta + \alpha) \cos \alpha - \cos(\theta + \alpha) \sin \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

より、点 P の座標が $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$ のときであることがわかる。さらに、 $\triangle ABP$ の面積は

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 \cdot |\overrightarrow{BP}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{28 \cdot 4 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP})^2}$$

と表すことができ、ここで、 $-8 \leq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 2$ より $0 \leq (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP})^2 \leq 64$ であるから

$$\triangle ABP \text{ の面積の最大値: } \frac{1}{2} \sqrt{112} = 2\sqrt{7}, \triangle ABP \text{ の面積の最小値: } \frac{1}{2} \sqrt{48} = 2\sqrt{3}$$

となることがわかる。

(1)

関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$ ($x > -7$) について、座標平面上において $y = f(x)$ で定まる曲線を C とす

る。また、定数 $a > -7$ に対して、 C 上の点 $A(a, f(a))$ をとり、点 A における曲線 C の接線を ℓ とし、接線 ℓ と x 軸の交点を P とする。

(a)

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x+7)\sqrt{x+7}} \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、接線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{2(a+7)\sqrt{a+7}}(x-a) + \frac{1}{\sqrt{a+7}}$$

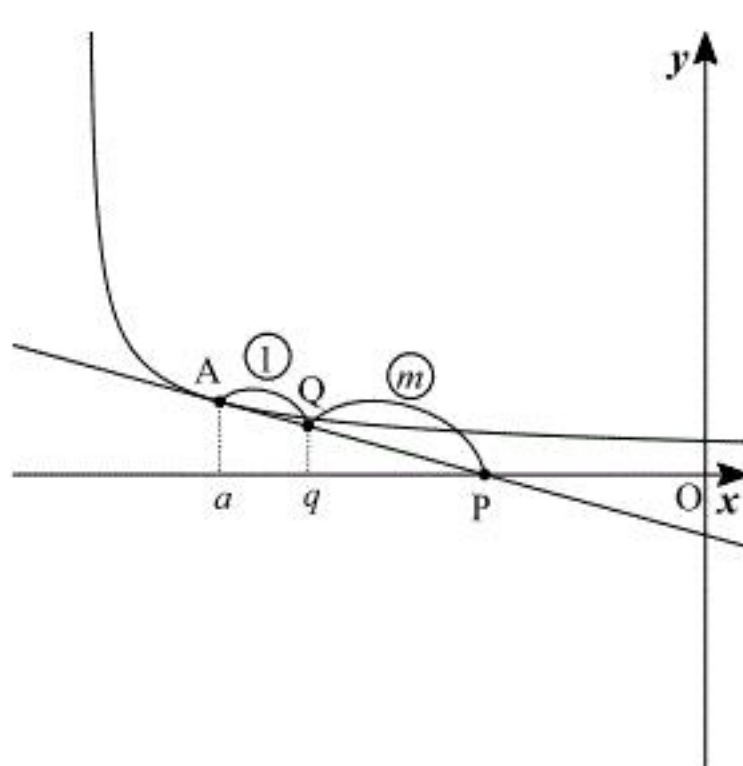
となる。したがって、点 P の x 座標は a を用いて

$$0 = -\frac{1}{2(a+7)\sqrt{a+7}}(x-a) + \frac{1}{\sqrt{a+7}} \Leftrightarrow x-a = 2(a+7) \\ \therefore x = 3a+14$$

と表せる。

(答) $3a+14$

(b)



点 Q は線分 AP を $1:m$ に内分する点であるから、その x 座標の値を q とすると

$$q = \frac{ma + (3a+14)}{1+m}$$

である。このとき、 $\frac{f(q)}{f(a)}$ の値は m を用いて

$$\frac{f(q)}{f(a)} = \sqrt{\frac{a+7}{\frac{ma+(3a+14)}{1+m}+7}} = \sqrt{\frac{(a+7)(1+m)}{(3+m)a+21+7m}} = \sqrt{\frac{(a+7)(1+m)}{(a+7)(3+m)}} = \sqrt{\frac{1+m}{3+m}}$$

と表せる。

$$\text{(答)} \quad \frac{f(q)}{f(a)} = \sqrt{\frac{1+m}{3+m}}$$

(2)

自然数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ とする。

(a)

①より $x > -7$ で $f'(x) < 0$ であるから、関数 $f(x)$ は単調減少関数である。よって、任意の自然数 k について、 $k \leq x \leq k+1$ の区間で

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

が成立する。したがって、この区間で全辺の定積分を計算することで、不等式

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

が得られる。ここで、関数 $f(x)$ は各区間で定数関数ではないから、各等号は成立せず

$$f(k) > \int_k^{k+1} f(x) dx > f(k+1) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

次に、上で示した不等式を $k=1, 2, \dots, n-1$ ($n \geq 2$) として足し合わせることで

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) > \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx > \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} f(k) > \int_1^n f(x) dx > \sum_{k=2}^n f(k)$$

$$\therefore S_n - f(n) > \int_1^n f(x) dx > S_n - f(1) \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(b)

定積分 $\int_1^{2018} f(x) dx$ の値を計算すると

$$\int_1^{2018} f(x) dx = \int_1^{2018} \frac{1}{\sqrt{x+7}} dx = \left[2\sqrt{x+7} \right]_1^{2018} = 2\sqrt{2025} - 2\sqrt{8} = 90 - 4\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

また、②に $n=2018$ を代入すると

$$S_{2018} - f(2018) > \int_1^{2018} f(x) dx > S_{2018} - f(1) \\ \Leftrightarrow \int_1^{2018} f(x) dx + f(1) > S_{2018} > \int_1^{2018} f(x) dx + f(2018)$$

となるから、さらに③を利用することで、不等式

$$90 - 4\sqrt{2} + \frac{1}{45} < S_{2018} < 90 - 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

が得られる。ここで、各辺の値はそれぞれ

$$90 - 4\sqrt{2} + \frac{1}{45} > 90 - 4\sqrt{2} > 90 - 6 = 84 \\ 90 - 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 90 - \frac{15\sqrt{2}}{4} = 90 - \sqrt{\frac{450}{16}} < 90 - \sqrt{\frac{400}{16}} = 85$$

と評価できるから、これらを合わせて

$$84 < S_{2018} < 85$$

となる。したがって、 $N \leq S_{2018}$ を満たす最大の整数 N は 84 である。

$$\text{(答)} \quad \int_1^{2018} f(x) dx = 90 - 4\sqrt{2}, \quad N = 84$$

(1)

実数 a は $a > 0$ を満たす。関数 $f(x) = \frac{1}{a^x} (x > 0)$ の導関数 $f'(x)$ は、対数微分法により

$$\begin{aligned} \{\log f(x)\}' &= \left(-\log x + \frac{\log a}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x} - \frac{\log a}{x^2} \\ \therefore f'(x) &= -\frac{x + \log a}{x^3} a^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 a の値によって場合分けして考える。

[1] $a \neq 1$ のとき

$u = \frac{2}{x}$ と置換すると $\frac{dx}{du} = -\frac{2}{u^2}$ であるから、不定積分 $\int \{f(x)\}^2 dx$ は

$$\int \{f(x)\}^2 dx = \int \frac{1}{x^2} a^{\frac{2}{x}} dx = \int \frac{1}{4} u^2 a^u \cdot \frac{dx}{du} du = -\frac{1}{2} \int a^u du = -\frac{1}{2 \log a} a^u + C = -\frac{1}{2 \log a} a^{\frac{2}{x}} + C$$

(ただし C は積分定数)

と求まる。

[2] $a = 1$ のとき

$f(x) = \frac{1}{x}$ となるから、

$$\int \{f(x)\}^2 dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

(ただし C は積分定数)

と求まる。

以上[1], [2]より、 C を積分定数として

$$\int \{f(x)\}^2 dx = \begin{cases} -\frac{1}{2 \log a} a^{\frac{2}{x}} + C & (a \neq 1) \\ -\frac{1}{x} + C & (a = 1) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = -\frac{x + \log a}{x^3} a^{\frac{1}{x}}, \quad \int \{f(x)\}^2 dx = \begin{cases} -\frac{1}{2 \log a} a^{\frac{2}{x}} + C & (a \neq 1) \\ -\frac{1}{x} + C & (a = 1) \end{cases} \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数})$$

(2)

「 $f'(b) = 0$ かつ $0 < b < 1$ を満たす b がただ1つ存在する」 $\cdots (*)$

(a)

(1)の結果より、 $f'(b) = 0$ を満たす b の値は

$$-\frac{b + \log a}{b^3} a^{\frac{1}{b}} = 0 \Leftrightarrow b = -\log a$$

である。したがって、 $(*)$ を満たすための条件は

$$\begin{aligned} 0 < b < 1 &\Leftrightarrow 0 < -\log a < 1 \\ \therefore \frac{1}{e} &< a < 1 \end{aligned}$$

である。また、 $a^{\frac{1}{b}}$ の値は

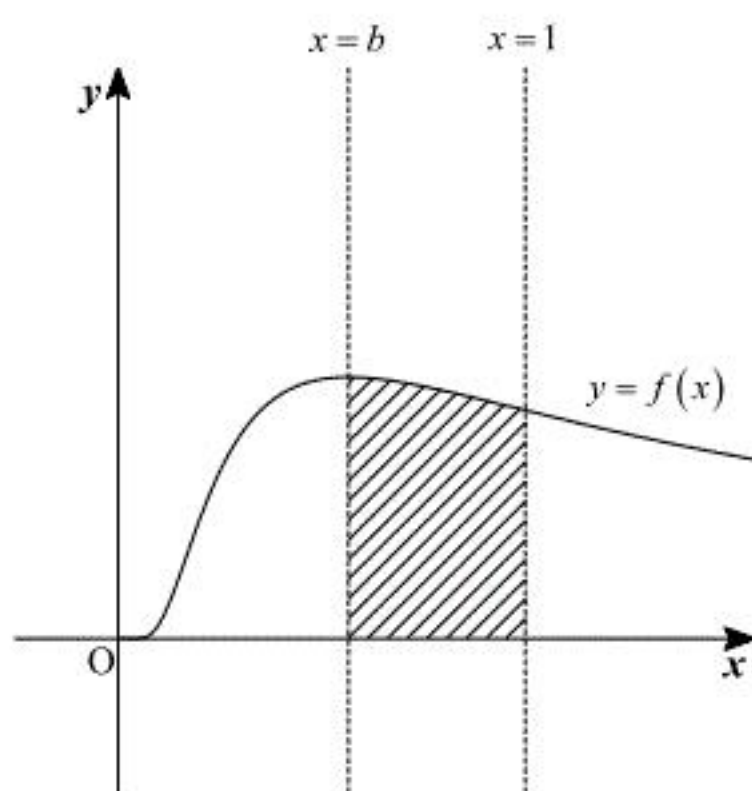
$$\begin{aligned} b = -\log a &\Leftrightarrow a = e^{-b} \\ \therefore a^{\frac{1}{b}} &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{e} < a < 1, \quad a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{e}$$

(b)

関数 $f(x)$ は $x > 0$ で $f(x) > 0$ を満たすから、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = b, x = 1$ は以下の図のような位置関係になる。



上図の斜線部を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 $V(a)$ は、(2)(a)の結果も用いて

$$V(a) = \pi \int_b^1 \{f(x)\}^2 dx = \pi \left[-\frac{1}{2 \log a} a^{\frac{2}{x}} \right]_b^1 = -\frac{\pi}{2 \log a} \left(a^2 - a^{\frac{2}{b}} \right) = -\frac{\pi}{2 \log a} \left(a^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

と表せる。したがって、求める極限は

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} (\log a) V(a) = \lim_{a \rightarrow 1-0} (\log a) \left\{ -\frac{\pi}{2 \log a} \left(a^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right\} = -\frac{\pi}{2} \lim_{a \rightarrow 1-0} \left(a^2 - \frac{1}{e^2} \right) = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow 1-0} (\log a) V(a) = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

(3)

定数 $t \geq 1$ と正の数 h に対して、不等式

$$0 < (a+h)^{\frac{1}{t}} - a^{\frac{1}{t}} \leq \left(\frac{1}{t} a^{\frac{1}{t}-1} \right) h$$

が成り立つことを示す。関数 $g(x)$ を $g(x) = x^{\frac{1}{t}} (x > 0)$ とおくと、この範囲で微分可能であるから、平均値の定理より

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{(a+h) - a} = g'(c) \quad (0 < a < c < a+h)$$

を満たす実数 c が存在する。ここで、 $g'(x) = \frac{1}{t} x^{\frac{1}{t}-1}$ であるから、この等式は

$$(a+h)^{\frac{1}{t}} - a^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{1}{t} c^{\frac{1}{t}-1} \right) h$$

と変形できる。ここで、 $0 < a < c < a+h$ より

$$\left(\frac{1}{t} c^{\frac{1}{t}-1} \right) h > 0, \quad \left(\frac{1}{t} c^{\frac{1}{t}-1} \right) h = \frac{h}{t} c^{\frac{1}{t}-1} \leq \frac{h}{t} a^{\frac{1}{t}-1} = \left(\frac{1}{t} a^{\frac{1}{t}-1} \right) h \quad (\because t \geq 1) \quad (\text{等号成立は } t=1 \text{ のとき})$$

が成り立つから、不等式

$$0 < (a+h)^{\frac{1}{t}} - a^{\frac{1}{t}} \leq \left(\frac{1}{t} a^{\frac{1}{t}-1} \right) h$$

が成り立つ。

(証明終)

また、この不等式に $a=1$ を代入して変形すると

$$\begin{aligned} 0 < (1+h)^{\frac{1}{t}} - 1 &\leq \frac{h}{t} \Leftrightarrow 1 < (1+h)^{\frac{1}{t}} \leq \frac{h}{t} + 1 \\ \therefore \frac{1}{t} &< \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} \leq \frac{h}{t^2} + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

となるから、区間 $1 \leq t \leq 2$ で全辺の定積分を計算することで、不等式

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t} dt &< \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt \leq \int_1^2 \left(\frac{h}{t^2} + \frac{1}{t} \right) dt \Leftrightarrow [\log t]_1^2 < \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt \leq \left[-\frac{h}{t} + \log t \right]_1^2 \\ \therefore \log 2 &< \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt \leq \log 2 + \frac{h}{2} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\lim_{h \rightarrow +0} \left(\log 2 + \frac{h}{2} \right) = \log 2$ であるから、はさみうちの原理より、求める極限は

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt = \log 2$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt = \log 2$$