

1

【解答】														
(1)	(a)	(b)	(c)	(d)										
	3	3	1	4										
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	1	4	1	4	0	1	2	1	2	3	1	6	1	
(3)(a)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ		
	2	5	3	7	2	0	3	7	1	5	3	7		
(3)(b)	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ			
	1	0	3	3	5	6	6	3	5	6	6			
(3)(c)	ユ	ヨ	ラ	リ	ル									
	3	3	2	5	6									

【解説】

(1)

(a)

まず

$$a, b \text{ がともに有理数である} \Rightarrow a + b \text{ が有理数である}$$

が成り立つことを示す。これは、

$$a, b \text{ がともに有理数である}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{s}{t}, b = \frac{u}{v} \left(t \neq 0, v \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t, u, v \text{ が存在する}$$
$$\Rightarrow a + b = \frac{sv + ut}{tv} \left(tv \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t, u, v \text{ が存在する}$$
$$\Rightarrow a + b \text{ が有理数である}$$

となり示される。また、

$$a + b \text{ が有理数である} \Rightarrow a, b \text{ がともに有理数である}$$

が成り立たないことを示す。反例として、 $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ のとき、 $a + b = 0$ は有理数であるが $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ は有理数でないことが挙げられる。したがって、 a, b がともに有理数であることは、 $a + b$ が有理数であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(b)

まず

$$a, b \text{ がともに有理数である} \Rightarrow ab \text{ が有理数である}$$

が成り立つことを示す。これは、

$$a, b \text{ がともに有理数である}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{s}{t}, b = \frac{u}{v} \left(t \neq 0, v \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t, u, v \text{ が存在する}$$
$$\Rightarrow ab = \frac{su}{tv} \left(tv \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t, u, v \text{ が存在する}$$
$$\Rightarrow ab \text{ が有理数である}$$

となり示される。また、

$$ab \text{ が有理数である} \Rightarrow a, b \text{ がともに有理数である}$$

が成り立たないことを示す。反例として、 $a = \sqrt{2}, b = 0$ のとき、 $ab = 0$ は有理数であるが $a = \sqrt{2}$ は有理数でないことが挙げられる。したがって、 a, b がともに有理数であることは、 ab が有理数であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(c)

$a \neq 0$ のとき、

$$a \text{ が有理数である}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{s}{t} \left(t \neq 0, s \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t \text{ が存在する}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{t}{s} \left(s \neq 0, t \neq 0 \right) \text{ を満たす整数 } s, t \text{ が存在する}$$
$$\frac{1}{a} \text{ が有理数である}$$

となる。したがって、 a が有理数であることは、 $\frac{1}{a}$ が有理数であるための必要十分条件である。

(d)

$a > 0$ のとき、まず

$$a, b \text{ がともに有理数である} \Rightarrow a^b \text{ が有理数である}$$

が成り立たないことを示す。反例として、 $a = 2, b = \frac{1}{2}$ のときこれらはともに有理数であるが、 $a^b = \sqrt{2}$ は有理数でないことが挙げられる。また、

$$a^b \text{ が有理数である} \Rightarrow a, b \text{ がともに有理数である}$$

が成り立たないことを示す。反例として、 $a = \sqrt{2}, b = 0$ のとき、 $a^b = 1$ は有理数であるが $a = \sqrt{2}$ は有理数でないことが挙げられる。したがって、 a, b がともに有理数であることは、 a^b が有理数であるための必要条件でも十分条件でもない。

(2)

さいころを投げたとき、 $\frac{1}{2}$ の確率で出た目が偶数となり、 $\frac{1}{2}$ の確率で出た目が奇数となる。よって、

$$\frac{1}{2} \text{ の確率で、} f_{i+1}(x) = \int_0^1 f_i(t) dt$$

となり、

$$\frac{1}{2} \text{ の確率で、} f_{i+1}(x) = f'_i(t)$$

となる。自然数 n, m に対して、 $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(m-1)!}$ となる状態を $S(n, m)$ と表すことにする。ただし、 $f_n(x) = 0$ となる状態を $S(n, 0)$ と表すことにする。 $f_1(x) = 1$ であるため、最初の状態は $S(1, 1)$ である。今、さいころを $(n-2)$ 回投げて、 $S(n-1, m)$ の状態にあるとする $(n \geq 2)$ 。さらにさいころを1回投げるとき、状態は以下になる。

[1] $m \geq 2$ のとき

このとき、

$$\int_0^1 f_{n-1}(t) dt = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(m-1)!} dt = \left[\frac{t^n}{m!} \right]_0^1 = \frac{x^{(n+1)-1}}{\{(m+1)-1\}!}$$
$$f'_{n-1}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n-1}}{(m-1)!} \right) = (m-1) \frac{x^{n-2}}{(m-1)!} = \frac{x^{(n-1)-1}}{\{(m-1)-1\}!}$$

よって、 $\frac{1}{2}$ の確率で $S(n, m+1)$ となり、 $\frac{1}{2}$ の確率で $S(n, m-1)$ となる。

[2] $m = 1$ のとき

このとき、

$$\int_0^1 f_{n-1}(t) dt = \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = x$$
$$f'_{n-1}(x) = \frac{d}{dx} 1 = 0$$

よって、 $\frac{1}{2}$ の確率で $S(n, 2)$ となり、 $\frac{1}{2}$ の確率で $S(n, 0)$ となる。

[3] $m = 0$ のとき

このとき、

$$\int_0^1 f_{n-1}(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$
$$f'_{n-1}(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0$$

よって、必ず $S(n, 0)$ となる。

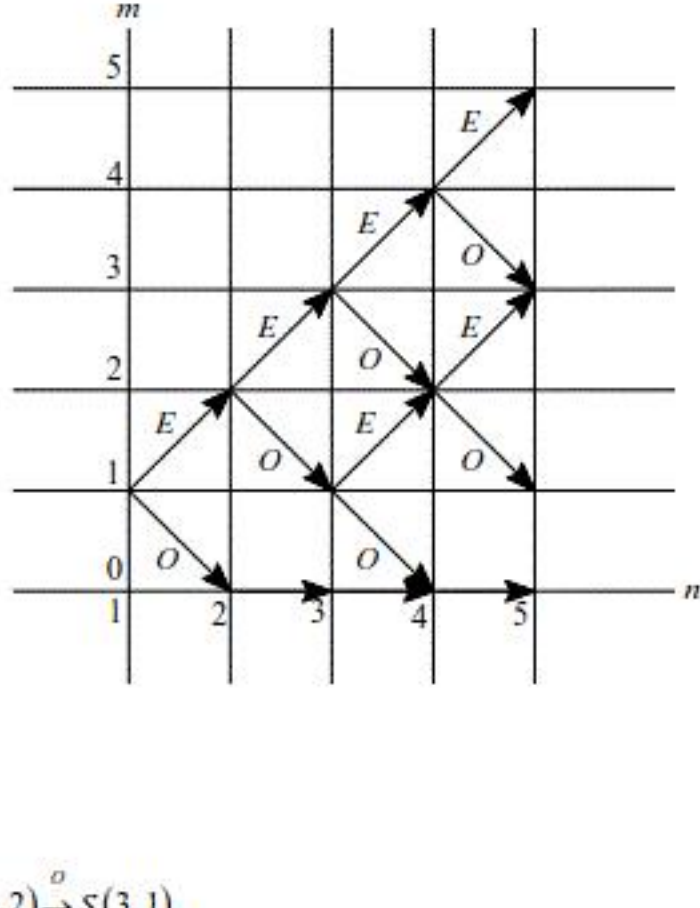
以上、[1], [2], [3]より、 $S(n, m+1), S(n, m), S(n, m-1)$ のいずれかの状態になる。したがって、 $n \geq 2, m \geq 2$ のとき、

$$P(n, m) = \frac{1}{2} P(n-1, m-1) + \frac{1}{2} P(n-1, m+1)$$

となり、また $n \geq 2$ のとき、

$$P(n, 1) = \frac{1}{2} P(n-1, 2)$$
$$P(n, 0) = \frac{1}{2} P(n-1, 1) + P(n-1, 0)$$

となる。以下では、状態遷移において、出た目が偶数であることを矢印の上に添え字 E 、出た目が奇数であることを矢印の上に添え字 O を付けて表すことにする。



(1)

円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の接線で点 $A(0, a)$ を通るものを求める。接点を円 C 上の接点の座標を (p, q) とおくと

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たし、接線の方程式は $px + qy = 1$ であることから、点 A を通るための条件は

$$p \cdot 0 + q \cdot a = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を連立して解くことで、 p, q の値は

$$(p, q) = \left(-\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \frac{1}{a} \right), \left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \frac{1}{a} \right)$$

と求まり、接線の方程式は、傾きの符号に注意して

$$\ell_1: -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}x + \frac{1}{a}y = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 - 1}x + a$$

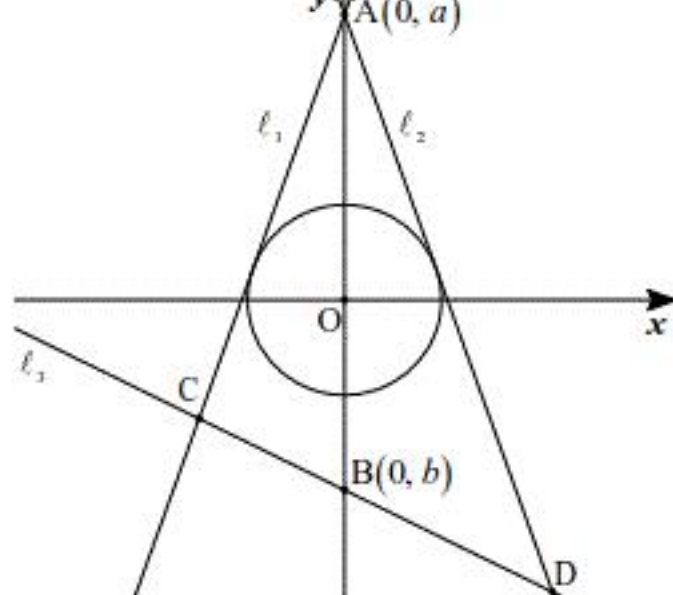
$$\ell_2: \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}x + \frac{1}{a}y = 1 \Leftrightarrow y = -\sqrt{a^2 - 1}x + a$$

となる。

$$(\text{答}) \ell_1 \text{ の方程式: } y = \sqrt{a^2 - 1}x + a, \ell_1 \text{ と } C \text{ との接点: } \left(-\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \frac{1}{a} \right)$$

$$\ell_2 \text{ の方程式: } y = -\sqrt{a^2 - 1}x + a, \ell_2 \text{ と } C \text{ との接点: } \left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \frac{1}{a} \right)$$

(2)



直線 ℓ_1 と ℓ_3 、直線 ℓ_2 と ℓ_3 の交点をそれぞれ点 C, D とおく。また、直線 ℓ_3 の傾きを k とおく

と、 k の動く範囲は $-\sqrt{a^2 - 1} < k < \sqrt{a^2 - 1}$ となり、方程式は $\ell_3: y = kx + b$ となる。このとき、2

点 C, D の x 座標は

$$\pm\sqrt{a^2 - 1}x + a = kx + b \Leftrightarrow x = \frac{a - b}{k \mp \sqrt{a^2 - 1}}$$

となり、 $\triangle ACD$ の面積 S は $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の面積の合計であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a - b) \left(-\frac{a - b}{k - \sqrt{a^2 - 1}} \right) + \frac{1}{2}(a - b) \left(\frac{a - b}{k + \sqrt{a^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a - b)^2 \frac{-(k + \sqrt{a^2 - 1}) + (k - \sqrt{a^2 - 1})}{k^2 - (\sqrt{a^2 - 1})^2} \\ &= \frac{(a - b)^2 \sqrt{a^2 - 1}}{(\sqrt{a^2 - 1})^2 - k^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $-\sqrt{a^2 - 1} < k < \sqrt{a^2 - 1}$ の範囲で S が最小となるのは $k = 0$ のときであり、そのときの面積 S を a, b を用いて表すと

$$S = \frac{(a - b)^2}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 傾き: } 0, \text{ 面積: } \frac{(a - b)^2}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

(3)

各 $a(a > 1)$ に対し、 b が $b \leq -1$ の範囲を動くとき

$$a - b \geq a + 1 (> 0) \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq (a + 1)^2 \quad (\text{等号成立は } b = -1 \text{ のとき})$$

より、(2) で求めた面積 $S(a, b)$ について

$$S(a, b) = \frac{(a - b)^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \geq \frac{(a + 1)^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (\text{等号成立は } b = -1 \text{ のとき})$$

となる。したがって、 $S(a, b)$ の最小値 $T(a)$ は $T(a) = \frac{(a + 1)^2}{\sqrt{a^2 - 1}}$ である。

$$(\text{答}) T(a) = \frac{(a + 1)^2}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

(4)

面積 $S(a, b)$ に対し、 a, b が $a > 1, b \leq -1$ の範囲を動くとき、まず a の値を固定すると、(3) の結果より、 $b = -1$ のとき最小値 $S(a, -1) = T(a)$ をとることがわかる。また、関数 $T(a)$ を変形

すると、 $T(a) = (a + 1)^{\frac{2}{3}}(a - 1)^{-\frac{1}{3}}$ となり、これを微分すると

$$\begin{aligned} T'(a) &= \left\{ (a + 1)^{\frac{2}{3}} \right\}' (a - 1)^{-\frac{1}{3}} + (a + 1)^{\frac{2}{3}} \left\{ (a - 1)^{-\frac{1}{3}} \right\}' \\ &= \frac{2}{3} (a + 1)^{-\frac{1}{3}} (a - 1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} (a + 1)^{\frac{2}{3}} (a - 1)^{-\frac{4}{3}} \\ &= (a + 1)^{\frac{1}{3}} (a - 1)^{-\frac{2}{3}} (a - 2) \end{aligned}$$

となるため、関数 $T(a)$ の $a > 1$ における増減表は以下のようになる。

a	(1)	...	2	...
$T'(a)$	$\nearrow$	-	0	+
$T(a)$	$\nearrow$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

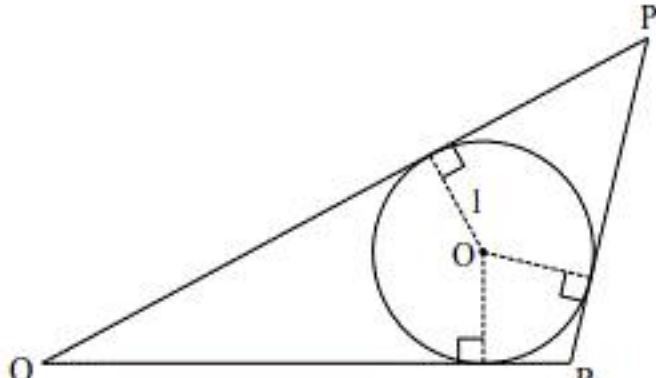
ここで、最小値は

$$T(2) = \frac{(2 + 1)^2}{\sqrt{2^2 - 1}} = 3\sqrt{3}$$

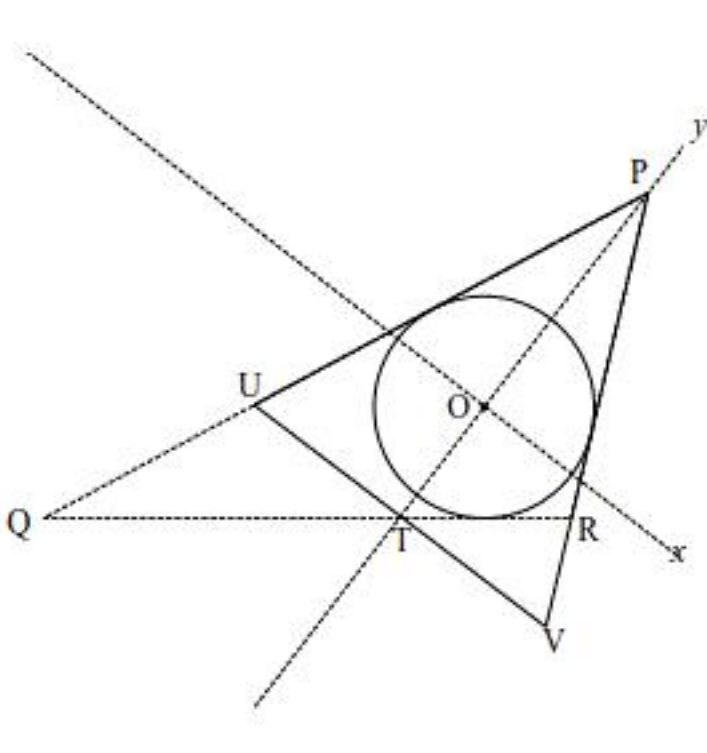
となる。したがって、面積 $S(a, b)$ は $(a, b) = (2, -1)$ のとき、最小値 $3\sqrt{3}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) (a, b) = (2, -1), \text{ 最小値: } 3\sqrt{3}$$

(5)



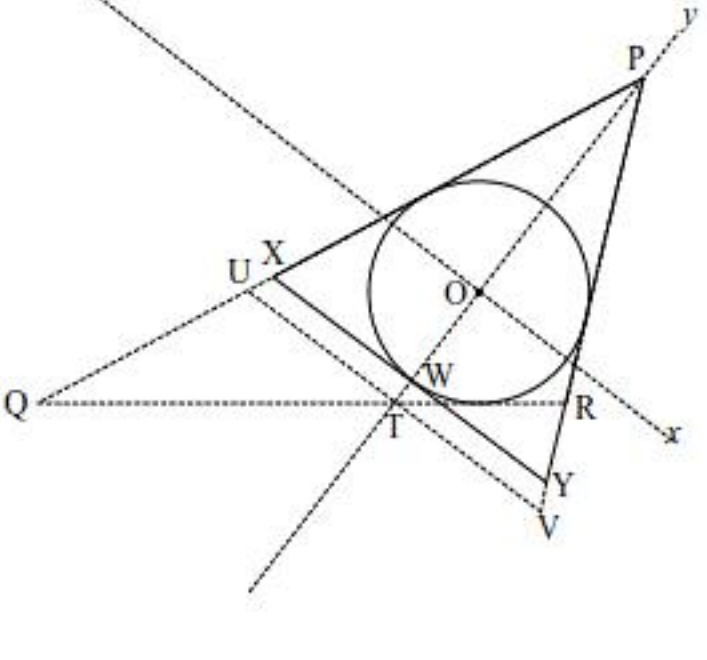
点 O を中心とする半径 1 の円を内接円とするような三角形の頂点を P, Q, R とする。ここで、この三角形を座標平面上に、直線 OP が y 軸と一致するようにおいても一般性を失わない。また、線分 QR と直線 OP の交点を T とおき、点 T を通り x 軸と平行な直線と、直線 PQ, PR との交点をそれぞれ U, V とおく。



点 P の座標を $P(0, a)$ とおき、点 T の座標を $T(0, b)$ とおくと、(2) の結果より

$$\triangle PQR \cong \triangle PUV (= S(a, b))$$

となる。次に、直線 OP と円の交点のうち、点 T に近い方の点を W とおき、点 W を通り x 軸と平行な直線と、直線 PQ, PR との交点をそれぞれ X, Y とおく。



このとき、(3) の結果より

$$\triangle PUV (= S(a, b)) \geq \triangle PXY (= T(a))$$

となる。さらに、(4) の結果より

$$T(a) \geq T(2) (= 3\sqrt{3})$$

となり、このとき、二等辺三角形 PXY は正三角形となっている。

したがって、半径 1 の円を内接円とするような三角形のうち、面積が最小になるような三角形は、面積が $3\sqrt{3}$ である正三角形であり、その 3 辺の長さの和を d とおくと

$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot 1 = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow d = 6\sqrt{3}$$

と求まる。

$$(\text{答}) 6\sqrt{3}$$

(1)

数列 $\{a_n\}$ について, $a_0 > 2$ であり, $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2}$ より

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n \geq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_0 = q_1 r + q_2 = 2r + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。

(a)

①, ②より, a_1, a_2 の値は, それぞれ

$$a_1 = a_0^2 - a_0 + 1 = \left(2r + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2r + \frac{1}{2}\right) + 1 = 4r^2 + \frac{3}{4}$$

$$a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = \left(4r^2 + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(4r^2 + \frac{3}{4}\right) + 1 = 16r^4 + 2r^2 + \frac{13}{16}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 4r^2 + \frac{3}{4}, a_2 = 16r^4 + 2r^2 + \frac{13}{16}$$

(b)

$$(q_1 s + q_2)^2 - (q_1 s + q_2) + 1 = q_1 (As^2 + Bs + C) + q_2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が s の恒等式となるような定数 A, B, C の値を求めればよい。各辺を変形すると

$$\text{左辺} : (q_1 s + q_2)^2 - (q_1 s + q_2) + 1 = \left(2s + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2s + \frac{1}{2}\right) + 1 = 4s^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{右辺} : q_1 (As^2 + Bs + C) + q_2 = 2(As^2 + Bs + C) + \frac{1}{2} = 2As^2 + 2Bs + 2C + \frac{1}{2}$$

となるから, 各項の係数を比較することで, 各定数の値は

$$(A, B, C) = \left(2, 0, \frac{1}{8}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (A, B, C) = \left(2, 0, \frac{1}{8}\right)$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ について, $b_0 = r$ であり, (1)(b)の定数 A, B, C を用いて

$$b_{n+1} = Ab_n^2 + Bb_n + C \quad \dots \textcircled{4}$$

を満たす。

(a)

④および(1)(b)の結果より, 求める値は

$$q_1 b_1 + q_2 = 2\left(2r^2 + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} = 4r^2 + \frac{3}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_1 b_1 + q_2 = 4r^2 + \frac{3}{4}$$

(b)

④および(1)(b)の結果より, 求める値は

$$q_1 b_2 + q_2 = 2\left\{2\left(2r^2 + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}\right\} + \frac{1}{2} = 16r^4 + 2r^2 + \frac{13}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_1 b_2 + q_2 = 16r^4 + 2r^2 + \frac{13}{16}$$

(3)

(a)

$$\frac{1}{a_{n+1} - p} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - p} \quad \dots \textcircled{5}$$

がすべての 0 以上の整数 n に対して成立するような実数 p の値を求める。⑤を変形すると

$$\frac{1}{a_{n+1} - p} = \frac{-(a_n - p) + a_n}{a_n(a_n - p)} \Leftrightarrow p(a_{n+1} - p) = a_n(a_n - p) \quad \text{かつ} \quad a_n \neq p \quad \text{かつ} \quad a_n \neq 0$$

となり, さらに, ①と合わせて

$$\begin{aligned} p(a_{n+1} - p) &= a_n(a_n - p) \\ \Leftrightarrow p\{(a_n^2 - a_n + 1) - p\} &= a_n^2 - pa_n \\ \Leftrightarrow (p-1)(a_n^2 - p) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで, ①を変形することで

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

となることから, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であり, $a_0 > 2$ であることから, ⑥の不等号の等号が成立することはなく, 定数値をとる数列でもないことがわかる。したがって, $p=1$ となることが必要であり, このとき $a_n \neq 0, 1$ も満たす。

$$(\text{答}) \quad p=1$$

(b)

部分和を $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k}$ とおく。まず, ⑤を変形すると, (3)(a)の結果と合わせて

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

となるから, 部分和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{a_0 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

となる。また, ⑥より, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であり, $a_0 > 2$ であることから, すべての 0 以上の整数 n に対して $a_n > 2$ となる。よって, さらに, ⑥は

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 1$$

となるため, $a_0 > 0$ と合わせて, すべての 0 以上の整数 n に対して $a_n > n$ となることが帰納的に示される。したがって, 数列 $\{a_n\}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

となるから, 求める無限級数の値は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_0 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{a_0 - 1}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_0 - 1}$$

(4)

(1)(a)および(2)(a)(b)の結果より, 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ について, すべての 0 以上の整数 n に対して $q_1 b_n + q_2 = a_n$ が成立すると推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1] $n=0$ のときに成立

$a_0 = q_1 r + q_2$ であり, $b_0 = r$ であるから, $q_1 b_0 + q_2 = a_0$ は成立する。

[2] $n=k$ ($k \geq 0$) のときに成立することを仮定

③, ④より

$$\begin{aligned} q_1 b_{k+1} + q_2 &= q_1 (Ab_k^2 + Bb_k + C) + q_2 \\ &= (q_1 b_k + q_2)^2 - (q_1 b_k + q_2) + 1 \end{aligned}$$

となり, ここで, 帰納法の仮定と①より

$$\begin{aligned} (q_1 b_k + q_2)^2 - (q_1 b_k + q_2) + 1 &= a_k^2 - a_k + 1 \\ &= a_{k+1} \end{aligned}$$

となるから, $n=k+1$ のときも成立する。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法によって, すべての 0 以上の整数 n に対して $q_1 b_n + q_2 = a_n$ が成立することが示された。

したがって, 求める無限級数の値は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_1 b_k + q_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_0 - 1} = \frac{1}{\left(2r + \frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{2}{4r - 1}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_1 b_k + q_2} = \frac{2}{4r - 1}$$