

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
	1	4	2	1	4	5	4	2	5	4
(3)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	
	1	2	1	2	1	1	2	1	2	
(4)	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ				
	7	4	2	3	4	2				

【解説】

(1)

部分積分を繰り返して行うと

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int (-e^{-x})' \sin x dx \\
 &= -e^{-x} \sin x - \int (-e^{-x}) \cos x dx \\
 &= -e^{-x} \sin x + \int (-e^{-x})' \cos x dx \\
 &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int f(x) dx
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$ と求まる。ただし、 C は積分定数である。

したがって、与えられた定積分は

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} \\
 \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{2}e^{-2\pi} - \frac{1}{2}e^{-\pi}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

となる。 $\frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{3}{4}\pi \leq \frac{11}{4}\pi$ であるから、 $f'(x) = 0$ となる x の値は

$$\begin{aligned}
 x + \frac{3}{4}\pi &= \pi, 2\pi \\
 \therefore x &= \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi
 \end{aligned}$$

と求まる。さらに $f(0) = f(2\pi) = 0$ だから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	最小	$\nearrow$	0

よって、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1}{4}\pi \text{ のとき、最大値 } f\left(\frac{1}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\pi})^{\frac{1}{4}} \\
 x = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき、最小値 } f\left(\frac{5}{4}\pi\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\pi})^{\frac{5}{4}}
 \end{aligned}$$

をとる。

(3)

$(k-1)\pi \leq x \leq k\pi$ のとき、 $|\sin x| = (-1)^{k-1} \sin x$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 S_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)| dx \\
 &= (-1)^{k-1} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \sin x dx \\
 &= (-1)^{k-1} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 n を自然数とすると、 $\sin n\pi = 0$ 、 $\cos n\pi = (-1)^n$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
 S_k &= (-1)^{k-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \{ (-1)^k e^{-k\pi} - (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi} \} \\
 &= e^{-(k-1)\pi} \left(\frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は初項 $\frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2}$ 、公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数であり、 $|e^{-\pi}| < 1$ よりこの級数は収束する。よって

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \left(\frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \left(\frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

と求まる。

(4)

$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ であり、 $\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$ は周期 2π の周期関数であることに注意する

と、(2)と同様に考えて区間 $0 < x$ において $f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = \frac{1}{4}\pi + 2(i-1)\pi, \frac{5}{4}\pi + 2(i-1)\pi \quad (i \text{ は自然数})$$

と求まる。したがって、 $2(i-1)\pi \leq x \leq 2i\pi$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$2(i-1)\pi$	...	$\frac{\pi}{4} + 2(i-1)\pi$	...	$\frac{5}{4}\pi + 2(i-1)\pi$	...	$2i\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

ゆえに、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{4} + 2(i-1)\pi$ で極大値

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 2(i-1)\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4} - 2(i-1)\pi} \quad \cdots \textcircled{1}$$

をとる。また、 $f(x)$ は $x = \frac{5}{4}\pi + 2(i-1)\pi$ で極小値

$$f\left(\frac{5}{4}\pi + 2(i-1)\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi - 2(i-1)\pi} \quad \cdots \textcircled{2}$$

をとる。全ての自然数 i について考えると、 $f(x)$ の $0 \leq x$ における極大値は全て①の形で表され、 $f(x)$ の $0 < x$ における極小値は全て②の形で表されることが分かる。そして①は i について単調減少し、②は i について単調増加することに注意すると、①は i 番目に大きい極大値、②は i 番目に小さい極小値であると分かる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
 M_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4} - 2(i-1)\pi} \\
 m_i &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi - 2(i-1)\pi}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ は初項 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi}$ 、公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数、 $\sum_{i=1}^{\infty} m_i$ は初項 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$ 、

公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数であり、 $|e^{-2\pi}| < 1$ よりこれらの級数は収束する。よって

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} M_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{(e^{\pi})^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)} \\
 \sum_{i=1}^{\infty} m_i &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = -\frac{(e^{\pi})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(1)

 $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ のとき、両辺の実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} \cos 2t_1 = \cos 2t_2 & \cdots \textcircled{1} \\ \sin 3t_1 = \sin 3t_2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。和積の公式を用いて①を変形すると

$$\begin{aligned} \cos 2t_1 &= \cos 2t_2 \\ \Leftrightarrow \cos 2t_2 - \cos 2t_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin(t_2 + t_1)\sin(t_2 - t_1) &= 0 \\ \therefore \sin(t_2 + t_1)\sin(t_2 - t_1) &= 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} < t_1 < t_2 < \frac{\pi}{2}$ より $-\pi < t_2 + t_1 < \pi$, $0 < t_2 - t_1 < \pi$ だから、③が成り立つのは $t_1 + t_2 = 0$ より $t_1 = -t_2$ のときのみである。②に $t_1 = -t_2$ を代入して

$$\begin{aligned} \sin 3(-t_2) &= \sin 3t_2 \\ \Leftrightarrow \sin 3t_2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $t_1 = -t_2$ かつ $t_1 < t_2$ より $0 < t_2$ だから、 $0 < 3t_2 < \frac{3}{2}\pi$ である。したがって、

$$3t_2 = \pi \Leftrightarrow t_2 = \frac{\pi}{3} \text{ となる。以上より、} t_1 = -\frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{\pi}{3} \text{ と求まる。}$$

$$(\text{答}) \quad t_1 = -\frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{\pi}{3}$$

(2)

半角の公式、および3倍角の公式を適用すると

$$y^2 = \sin^2 3t = \frac{1 - \cos 6t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(4\cos^3 2t - 3\cos 2t) = -2x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y^2 = -2x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

(3)

実数 t は(1)より $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ となる全ての値を取る。このとき $-\frac{1}{2} \leq \cos 2t \leq 1$ だから x の取りうる範囲は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ となり、このとき(2)の方程式が表す曲線と $\alpha(t)$ の軌跡は一致する。まずこの曲線の概形を求める。 y^2 を変形すると

$$y^2 = -\frac{1}{2}(4x^3 - 3x - 1) = -\frac{1}{2}(x-1)(4x^2 + 4x + 1) = \frac{1}{2}(1-x)(2x+1)^2$$

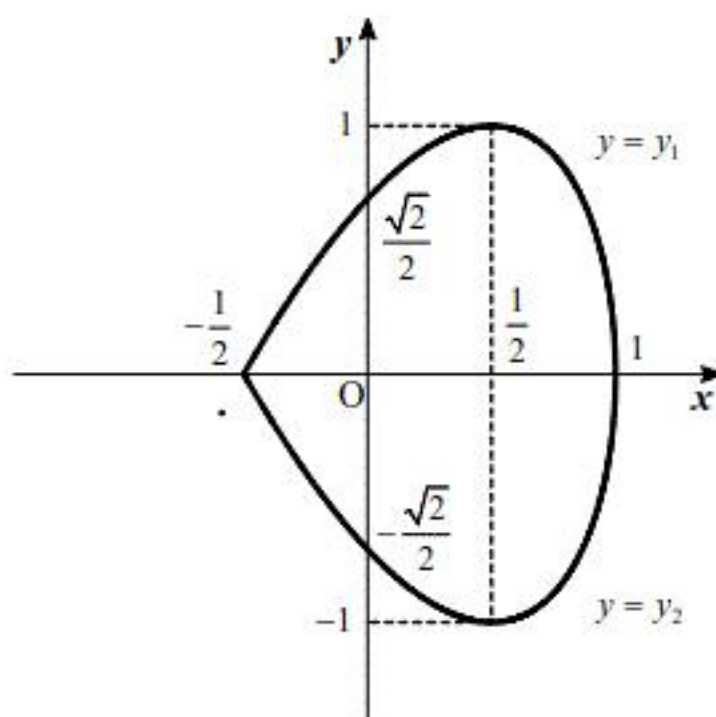
$$\therefore y = \pm(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}} \quad (\because -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ より } 2x+1 \geq 0)$$

となる。 $y_1 = (2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, $y_2 = -(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ とおくと、 $y = y_1$ のグラフと $y = y_2$ のグラフは x 軸対称である。また、 y_1 を x で微分すると

$$\frac{dy_1}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-x}{2}} + (2x+1) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2(1-x)}} = \frac{3(1-2x)}{2\sqrt{2(1-x)}}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dy_1}{dx}$		+	0	-	
y_1	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

以上より、 $\alpha(t)$ が描く曲線の概形は以下の図のようになる。上図より、求める面積は $2\int_{-\frac{1}{2}}^1 y_1 dx$ だと分かる。 $x = \cos 2t$ と変数変換すると、積分区間の対応

表は以下のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	1
t	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	0

また、 $x = \cos 2t$ より $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$ となり、 $y_1 = \sin 3t$ である。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} 2\int_{-\frac{1}{2}}^1 y_1 dx &= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin 3t \cdot (-2\sin 2t) dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \sin 2t dt \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 5t - \cos t) dt \\ &= -2\left[\frac{1}{5}\sin 5t - \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -2\left\{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

(4)

 $\beta(t)$ を変形すると

$$\beta(t) = (-1-i)(\cos 2t + i\sin 3t) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{4}\pi + i\sin \frac{5}{4}\pi\right)\alpha(t)$$

となるから、点 $\beta(t)$ は点 $\alpha(t)$ の原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍して原点中心に $\frac{5}{4}\pi$ 回転させた位置にある。したがって、 $\beta(t)$ が描く曲線は $\alpha(t)$ が描く曲線と相似で相似比は $1:\sqrt{2}$ である。よって、 $\beta(t)$ が描く曲線で囲まれた領域の面積は(3)で求めた面積の $(\sqrt{2})^2$ 倍となり

$$(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{5} = \frac{12\sqrt{3}}{5}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{12\sqrt{3}}{5}$$