

1

【解答】

|     |              |              |              |              |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1) | <div>ア</div> | <div>イ</div> | <div>ウ</div> | <div>エ</div> | <div>オ</div> | <div>カ</div> |
|     | 3            | 4            | 2            | 2            | 2            | 2            |
|     | <div>キ</div> | <div>ク</div> | <div>ケ</div> | <div>コ</div> | <div>サ</div> |              |
|     | 4            | 1            | 2            | 1            | 2            |              |
| (2) | <div>シ</div> | <div>ス</div> | <div>セ</div> | <div>ソ</div> | <div>タ</div> | <div>チ</div> |
|     | 2            | 3            | 2            | 3            | 1            | 2            |
|     | <div>ツ</div> | <div>テ</div> | <div>ト</div> |              |              |              |
|     | 1            | 4            | 5            |              |              |              |
| (3) | <div>ナ</div> | <div>ニ</div> | <div>ヌ</div> | <div>ネ</div> | <div>ノ</div> | <div>ハ</div> |
|     | 3            | 3            | 5            | 3            | 2            | 2            |
|     | <div>ヒ</div> | <div>フ</div> | <div>ヘ</div> | <div>ホ</div> | <div>マ</div> |              |
|     | 9            | 2            | 3            | 3            | 2            |              |

【解説】

(1)(a)

$f(x)=-3x+\sqrt{x^2-1}$  のとき

$$f'(x)=-3+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

であり、 $x<-1$  のとき  $f'(x)<0$  である。また、 $x>1$  のとき

$$f'(x)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\geq 9(x^2-1)$$
$$\therefore 1< x\leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となるから、 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |            |      |             |     |            |                       |            |
|---------|------------|------|-------------|-----|------------|-----------------------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-1$ | $\diagdown$ | $1$ | $\cdots$   | $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | $-$        |      | $\diagdown$ |     | $+$        | $0$                   | $-$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ |      | $\diagdown$ |     | $\nearrow$ | 極大値                   | $\searrow$ |

したがって、 $f(x)$  は  $x=\frac{3}{4}\sqrt{2}$  のときに極大値  $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=-2\sqrt{2}$  をとることがわかる。

(b)

$$a=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\left(-3+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-2$$

である。 $b$  に関して、 $t=-x$  とおくと、 $x\rightarrow-\infty$  のとき  $t\rightarrow\infty$  であることから、

$$b=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{3t+\sqrt{t^2-1}}{-t}=\lim_{t\rightarrow\infty}\left(-3-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)=-4$$

となる。また、

$$\begin{aligned}xf(x)-ax^2&=xf(x)+2x^2\\&=x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\\&=\frac{x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\&=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\left\{xf(x)-ax^2\right\}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

となる。次に、 $t=-x$  とおくと、 $x\rightarrow-\infty$  のとき  $t\rightarrow\infty$  となる。よって、

$$\begin{aligned}xf(x)-bx^2&=xf(x)+4x^2\\&=x\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\\&=\frac{x\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x}\\&=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}+t}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}+1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\left\{xf(x)-bx^2\right\}=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

となる。

(2)(a)

真数は正であるから、 $x>0$  である。この範囲において、

$$\begin{aligned}2^{4x^2\log_2x}&=x\\&\Leftrightarrow 2^{4x^2\log_2x}=2^{\log_2x}\\&\Leftrightarrow 4x^2\log_2x=\log_2x\\&\Leftrightarrow (4x^2-1)\log_2x=0\\&\therefore x=1,\pm\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $x>0$  より、求める実数解の個数は  $x=\frac{1}{2},1$  の 2 個である。

(b)

$a=\log_{10}2$ 、 $b=\log_{10}3$  とするとき

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{9}{125}&=\log_{10}\frac{3^2}{5^3}\\&=2\log_{10}3-3\log_{10}5\\&=2\log_{10}3-3(\log_{10}10-\log_{10}2)\\&=3a+2b-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{100}}\sqrt{\frac{3}{4}}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10}\frac{3}{4}}{\log_{10}\frac{1}{100}}\\&=-\frac{1}{4}(\log_{10}3-\log_{10}2^2)\\&=\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b\end{aligned}$$

と表される。自然数  $n$  に対して  $\left(\frac{3}{2}\right)^k$  の整数部分が  $n$  桁の数となるとき

$$\begin{aligned}10^{n-1}&\leq\left(\frac{3}{2}\right)^k<10^n\\&\Leftrightarrow n-1\leq k\log_{10}\frac{3}{2}<n\\&\Leftrightarrow \frac{n-1}{\log_{10}3-\log_{10}2}\leq k<\frac{n}{\log_{10}3-\log_{10}2}\end{aligned}$$

が成り立ち、このとき、

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{\log_{10}3-\log_{10}2}&\leq k_n<\frac{n}{\log_{10}3-\log_{10}2}\\&\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq \frac{k_n}{n}<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}\end{aligned}$$

も成立する。

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{k_n}{n}=\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

となる。ここで、

$$0.3010<\log_{10}2<0.3011,\,0.4771<\log_{10}3<0.4772$$

であるから、

$$\begin{aligned}0.4771-0.3011<\log_{10}3-\log_{10}2<0.4772-0.3010\\&\Leftrightarrow \frac{1}{0.1762}<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\frac{1}{0.1760}\end{aligned}$$

$$\therefore 5.67\cdots<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<5.68\cdots$$

となるので、求める整数部分は 5 となる。

(3)

$b_n=a_n+3^n$  より

$$\begin{aligned}a_{n+1}-3a_n&=4(a_n+3^n)(a_{n+1}+3^{n+1})\\&\Leftrightarrow b_{n+1}-3^{n+1}-3(b_n-3^n)=4b_nb_{n+1}\\&\Leftrightarrow b_{n+1}-3b_n=4b_nb_{n+1}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $b_n\neq 0$  ならば  $b_{n+1}\neq 0$  であり、 $b_1=a_1+3=-\frac{3}{5}$  であるから、数学的帰納法によ

りすべての  $n$  で  $b_n\neq 0$  であることがわかる。そこで、 $\textcircled{1}$  の両辺を  $b_nb_{n+1}(\neq 0)$  で割ると

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}-3\cdot\frac{1}{b_{n+1}}&=4\\&\Leftrightarrow 3c_{n+1}-c_n=-4\\&\Leftrightarrow c_{n+1}+2=\frac{1}{3}(c_n+2)\end{aligned}$$

と表せる。数列  $\{c_n+2\}$  は初項  $c_1+2=\frac{1}{b_1}+2=\frac{1}{3}$ 、公比  $\frac{1}{3}$  の等比数列であるから、

$$c_n+2=\left(\frac{1}{3}\right)^n\Leftrightarrow c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2$$

となる。したがって、

$$a_n=\frac{1}{c_n}-3^n=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2}-3^n=\frac{2\cdot 9^n}{1-2\cdot 3^n}$$

である。また、

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{d^n}=\frac{1}{d^n}\left(\frac{2\cdot 9^{n+1}}{1-2\cdot 3^{n+1}}-\frac{2\cdot 9^n}{1-2\cdot 3^n}\right)=\left(\frac{3}{d}\right)^n\frac{\frac{16}{3^n}-24}{\left(\frac{1}{3^n}-6\right)\left(\frac{1}{3^n}-2\right)}$$

であり、これが  $n\rightarrow\infty$  で 0 でない値に収束するとき

$$\frac{3}{d}=1\Leftrightarrow d=3$$

となる。このとき

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{d^n}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{16}{3^n}-24}{\left(\frac{1}{3^n}-6\right)\left(\frac{1}{3^n}-2\right)}=-2$$

である。



(1)

図形  $D_{a,b}$  は図形  $C$  を  $x$  軸方向に  $a$ 、 $y$  軸方向に  $b$  だけ平行移動して得られる図形であるから、図形  $D_{a,b}$  の  $x, y$  についての方程式は、

$$y = \sin(x-a) + b$$

であり、 $x$  の動く範囲は、

$$-\pi \leq x-a \leq \pi \Leftrightarrow -\pi+a \leq x \leq \pi+a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \sin(x-a) + b \quad (-\pi+a \leq x \leq \pi+a)$$

(2)

図形  $C$  の  $x$  が動く範囲は

$$-\pi \leq x \leq \pi \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、図形  $D_{a,b}$  の範囲は

$$-\pi+a \leq x \leq \pi+a \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、図形  $C$  と図形  $D_{a,b}$  が共有点を持つためには、 $C$  と  $D_{a,b}$  の方程式から  $y$  を消去した

$$\sin(x-a) + b = \sin x$$

が、①と②の共通範囲

$$-\pi+a \leq x \leq \pi$$

に実数解を持てばよい。ここで、与えられた公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sin(x-a) + b &= \sin x \\ \Leftrightarrow 2 \cos\left(x-\frac{a}{2}\right) \sin \frac{a}{2} &= b \end{aligned}$$

となる。また、

$$-\pi+a \leq x \leq \pi \Leftrightarrow -\left(\pi-\frac{a}{2}\right) \leq x-\frac{a}{2} \leq \pi-\frac{a}{2}$$

より、 $\cos\left(x-\frac{a}{2}\right)$  が取り得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi-\frac{a}{2}\right) &\leq \cos\left(x-\frac{a}{2}\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\cos \frac{a}{2} &\leq \cos\left(x-\frac{a}{2}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

であるから、求める  $b$  の範囲は

$$\begin{aligned} -2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} &\leq b \leq 2 \sin \frac{a}{2} \\ \therefore -\sin a &\leq b \leq 2 \sin \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\sin a \leq b \leq 2 \sin \frac{a}{2}$$

(3)

(2)より  $b = \frac{1}{2}$  のとき、

$$\begin{aligned} -\sin a &\leq \frac{1}{2} \leq 2 \sin \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \sin a &\geq -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \sin \frac{a}{2} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を満たせばよい。 $0 < a < 2\pi$  において

$$\sin a \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi \leq a < 2\pi \quad \dots \textcircled{3}$$

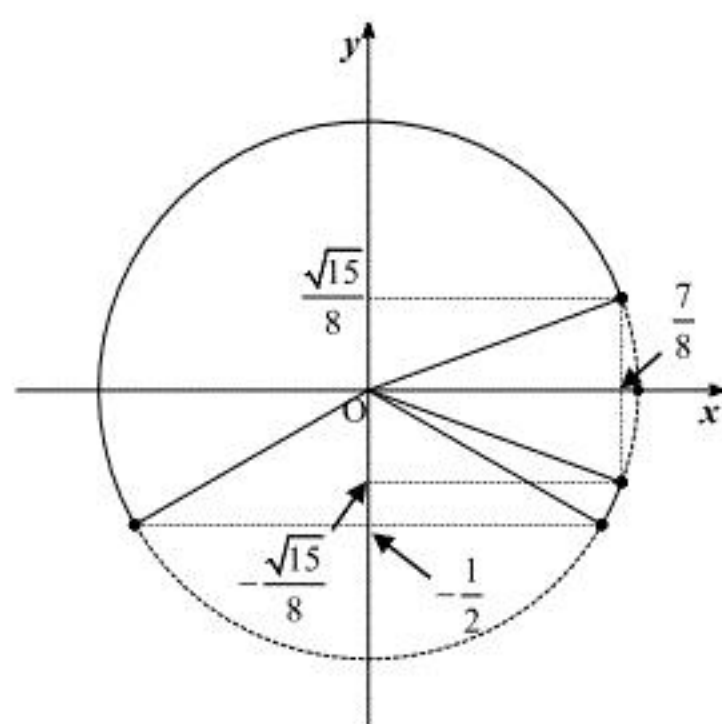
が成り立つ。一方、

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &\geq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{a}{2} &\geq \frac{1}{16} \left( \because \sin \frac{a}{2} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1-\cos a}{2} &\geq \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \cos a &\leq \frac{7}{8} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。また、 $\cos a = \frac{7}{8}$  のとき、

$$|\sin a| = \sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{\sqrt{15}}{8} < \frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{1}{2}$$

である。



これより、③、④を満たす  $a$  の範囲を

$$\theta_1 \leq a \leq \theta_2 \quad \text{または} \quad \theta_3 \leq a \leq \theta_4$$

と表すとき

$$\theta_2 = \frac{7}{6}\pi, \theta_3 = \frac{11}{6}\pi$$

であり

$$\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{15}}{8}, \sin \theta_4 = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{15}}{8}, \theta_2 = \frac{7}{6}\pi, \theta_3 = \frac{11}{6}\pi, \sin \theta_4 = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

3

(1)

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を楕円  $C$  の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} & (r \cos \theta + 1)^2 + 2r^2 \sin^2 \theta = 2 \\ \Leftrightarrow & (1 + \sin^2 \theta)r^2 + 2r \cos \theta - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 - \cos^2 \theta)r^2 + 2r \cos \theta - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2} - \cos \theta)(\sqrt{2} + \cos \theta)r^2 + 2r \cos \theta - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ (\sqrt{2} - \cos \theta)r + 1 \right\} \left\{ (\sqrt{2} + \cos \theta)r - 1 \right\} = 0 \\ \therefore & r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}, -\frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta} \end{aligned}$$

となるが,  $r > 0$  より  $r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}$  である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}$$

(2)

直線  $\ell_1$  が  $x$  軸となす角を  $\alpha$  とおくと, 直線  $\ell_2$  が  $x$  軸となす角は  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  となる。したがって

$$\begin{aligned} \text{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \alpha} + \frac{1}{\sqrt{2} + \cos(\alpha + \pi)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \cos^2 \alpha} \\ \text{PQ} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2} - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\frac{1}{\text{AB}} + \frac{1}{\text{PQ}} = \frac{2 - \cos^2 \alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{2 - \sin^2 \alpha}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となる。これは  $\alpha$  によらないため,  $\ell_1, \ell_2$  のとり方によらず一定である。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(3)(a)

楕円  $C$  上のある点  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) における接線の方程式は

$$(r \cos \theta + 1)(x + 1) + 2yr \sin \theta = 2$$

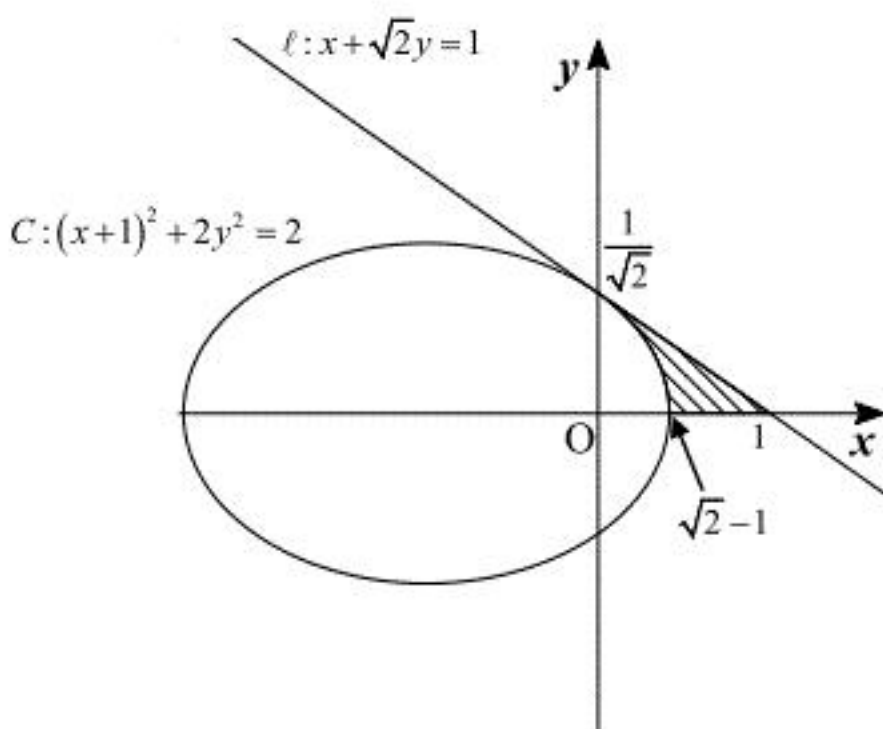
である。これが点  $(1, 0)$  を通るので

$$\begin{aligned} & 2(r \cos \theta + 1) = 2 \\ \Leftrightarrow & r \cos \theta = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos \theta = 0 \quad (\because r > 0) \\ \therefore & \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

となるが, 接線の  $y$  切片が正であることから  $\theta = \frac{\pi}{2}$  である。このとき,  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$  より, 接点の座

標は  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  で, 接線  $\ell$  の方程式は  $x + \sqrt{2}y = 1$  となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: x + \sqrt{2}y = 1, \text{ 接点 } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



上図の斜線部を  $x$  軸周りに1回転させてできる立体の体積を求めればよい。

$$(x+1)^2 + 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2$$

であることから, 求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot 1 - \pi \int_0^{\sqrt{2}-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{6} - \pi \left[ x - \frac{1}{6}(x+1)^3 \right]_0^{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\pi}{6} - \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{6} \right) \pi \\ &= \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \pi$$