

1

【解答】

(1)(a)	ア	イ										
	1	3										
(1)(b)	ウ	エ	オ									
	2	3	3									
(1)(c)	カ	キ	ク	ケ								
	1	1	2	3								
(2)(a)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ			
	7	2	0	1	3	9	4	0	0			
(2)(b)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ							
	3	2	0	2	5							
(2)(c)	ネ	ノ	ハ									
	8	2	3									

【解説】

(1)(a)

△ABCについて余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{7^2 + 5^2 - (\sqrt{39})^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

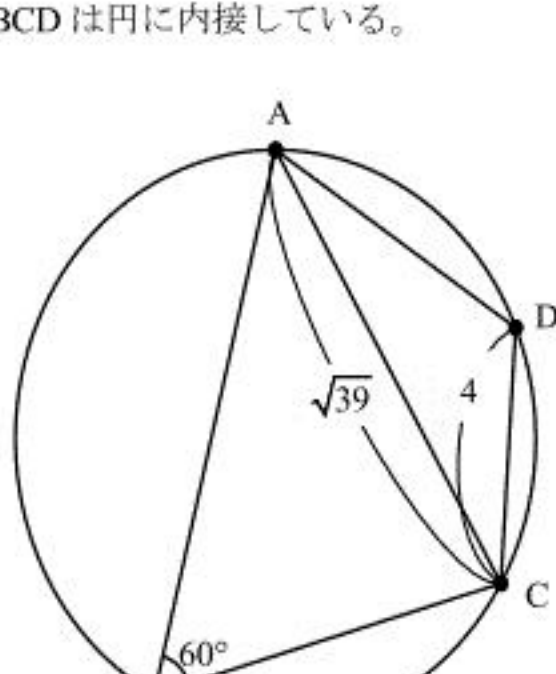
となる。よって、 $\angle ABC = 60^\circ$ となるから、△ABCについて正弦定理より、

$$\begin{aligned}2r &= \frac{AC}{\sin \angle ABC} \\ \Leftrightarrow 2r &= \frac{\sqrt{39}}{\sin 60^\circ} \\ \therefore r &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

となる。

(b)

下の図のように四角形ABCDは円に内接している。



よって、円に内接する四角形の性質より、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \therefore \angle ADC = 120^\circ$$

となる。CD=4のとき、 $AD = x (x > 0)$ とすると、△ADCについて余弦定理より、

$$\begin{aligned}AC^2 &= CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow (\sqrt{39})^2 &= 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow 0 &= x^2 + 4x - 23 \\ \therefore x &= -2 + 3\sqrt{3} (\because x > 0)\end{aligned}$$

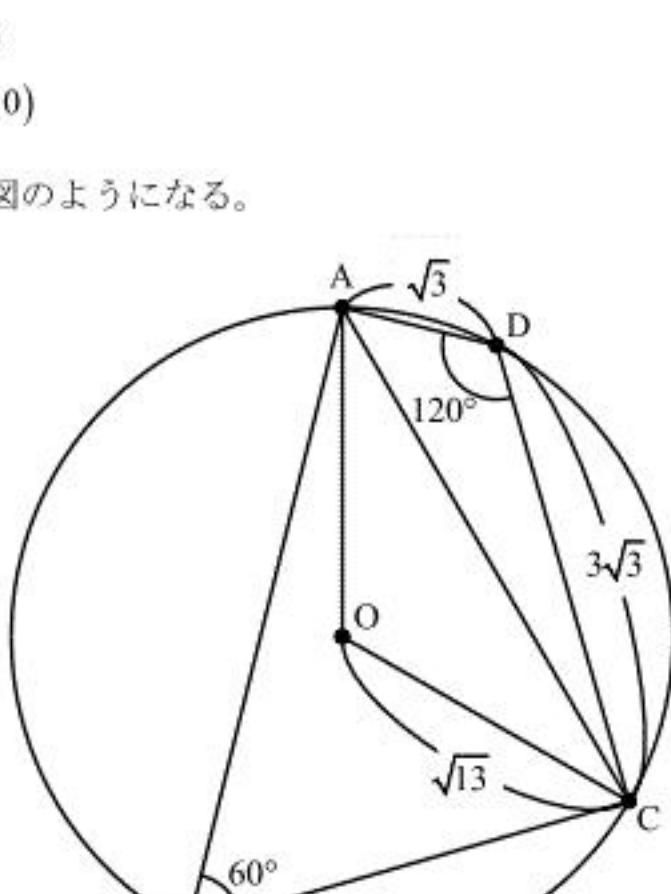
である。

(c)

$AD = x (x > 0)$ とすると、 $CD = 3AD = 3x$ となる。△ADCについて余弦定理より、

$$\begin{aligned}AC^2 &= CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow (\sqrt{39})^2 &= (3x)^2 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot x \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow 0 &= 13x^2 - 39 \\ \therefore x &= \sqrt{3} (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。よって、下の図のようになる。



△ADCの面積を S_1 、△AOCの面積を S_2 とすると、四角形AOCDの面積は $S_1 + S_2$ となる。△ADCについて、三角形の面積の公式より、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} CD \cdot AD \sin \angle ADC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。また、円周角の定理より $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ となるから、△AOCについて、三角形の面積の公式より、

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} AO \cdot CO \sin \angle AOC \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \\ &= \frac{13\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は、

$$S_1 + S_2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{13\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}}{2}$$

となる。

(2)(a)

2回目の実験で成功するのは、

- ・1回目の実験で成功し、2回目の実験で成功するとき
- ・1回目の実験で失敗し、2回目の実験で成功するとき

のどちらかである。よって、

$$\begin{aligned}p_2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{7}{20}\end{aligned}$$

となる。また、3回目の実験で成功するのは、

- ・2回目の実験で成功し、3回目の実験で成功するとき
- ・2回目の実験で失敗し、3回目の実験で成功するとき

のどちらかである。よって、

$$\begin{aligned}p_3 &= p_2 \cdot \frac{1}{4} + (1 - p_2) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{7}{20}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{139}{400}\end{aligned}$$

となる。

(b)

n を自然数とする。 $(n+1)$ 回目の実験で成功するのは、

- ・ n 回目の実験で成功し、 $(n+1)$ 回目の実験で成功するとき
- ・ n 回目の実験で失敗し、 $(n+1)$ 回目の実験で成功するとき

のどちらかである。よって、

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n \cdot \frac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{3}{20} p_n + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

となる。

(c)

(b)の結果より

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= -\frac{3}{20} p_n + \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{8}{23} &= -\frac{3}{20} \left(p_n - \frac{8}{23} \right)\end{aligned}$$

となる。 $p_1 = \frac{1}{3}$ であるから、自然数 n に対し

$$\begin{aligned}p_n - \frac{8}{23} &= \left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{23} \right) \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{8}{23} - \frac{1}{69} \left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1}\end{aligned}$$

となる。よって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\left(-\frac{3}{20} \right)^{n-1} \rightarrow 0$ となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{8}{23}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ				
	1	7	2	4	7	7	1	1	2				
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
	4	0	2	4	1	7	5	7	6	2	8	9	
(3)	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ						
	6	1	6	6	1	4	7						

【解説】

最初に軌跡 C_1 を求める。条件より $\sqrt{(x-a)^2+(y-1)^2}=|y-(-1)|$ なので、両辺を2乗して

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-1)^2 &= (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{4}(x-a)^2 \\ \therefore y &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

となり、これが軌跡 C_1 の方程式である。

(1)

C_1 と $C_2: y = -4x^2 + ax + a$ の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned}-4x^2 + ax + a &= \frac{1}{4}(x-a)^2 \\ \therefore 17x^2 - 6ax + a^2 - 4a &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。この x の2次方程式の判別式が0になるとき、 C_1 と C_2 の共有点がただ1つになる。すなわち、

$$\begin{aligned}(-3a)^2 - 17(a^2 - 4a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a - 17) &= 0\end{aligned}$$

である。 $a > 0$ より求める値は $a = \frac{17}{2}$ であり、このとき方程式①の重解を α とおくと、解と係数の関係から

$$\begin{aligned}2\alpha &= \frac{6}{17} \cdot \frac{17}{2} \\ \therefore \alpha &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

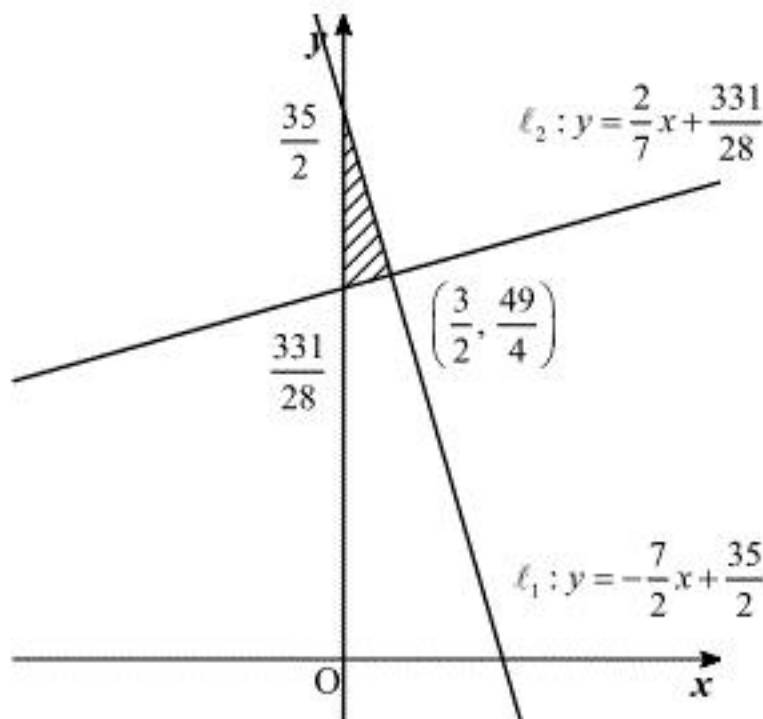
となるので、 C_1 の方程式から求める共有点の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ となる。また、 C_2 の方程式を微

分すると $y' = -8x + \frac{17}{2}$ であり、 $x = \frac{3}{2}$ のとき $y' = -\frac{7}{2}$ であることから

$$\begin{aligned}\ell_1: y &= -\frac{7}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{49}{4} \\ \therefore \ell_1: y &= -\frac{7}{2}x + \frac{35}{2} \\ \ell_2: y &= \frac{2}{7}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{49}{4} \\ \therefore \ell_2: y &= \frac{2}{7}x + \frac{331}{28}\end{aligned}$$

となる。また、 ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ である。よって、求める面積は下図の斜線部の三角

形の面積に等しく、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{35}{2} - \frac{331}{28}\right) = \frac{477}{112}$ と求められる。



(2)

y 軸と C_1 の共有点が y 軸と C_2 の共有点に一致するので

$$\frac{a^2}{4} = a \Leftrightarrow a(a-4) = 0$$

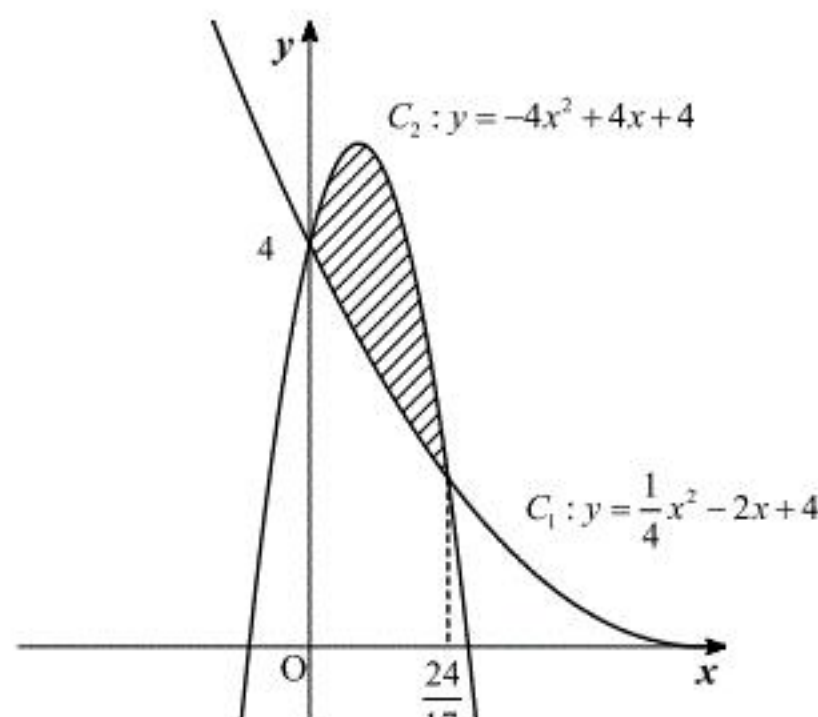
である。したがって、 $a > 0$ より $a = 4$ である。このとき、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = -4x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x(17x - 24) = 0$$

より $x = 0, \frac{24}{17}$ である。よって、下図の斜線部の面積が求める領域の面積なので

$$\begin{aligned}& \int_0^{\frac{24}{17}} \left\{ (-4x^2 + 4x + 4) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \right) \right\} dx \\ &= -\frac{17}{4} \int_0^{\frac{24}{17}} x \left(x - \frac{24}{17} \right) dx \\ &= \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{24}{17} - 0 \right)^3 \\ &= \frac{576}{289}\end{aligned}$$

と求まる。



(3)

C_1 と C_3 の方程式を連立すると、 $x \neq -1$ の条件の下で

$$\frac{1}{4}(x-4)^2 = \frac{7}{x+1} \Leftrightarrow (x-6)(x^2 - x + 2) = 0$$

と変形できる。 $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ より、この方程式の実数解は $x = 6$ のみである。よって、 C_1 と C_3 の交点は $(6, 1)$ と求まる。

ここで、 C_1 および C_3 の方程式を x について解くと

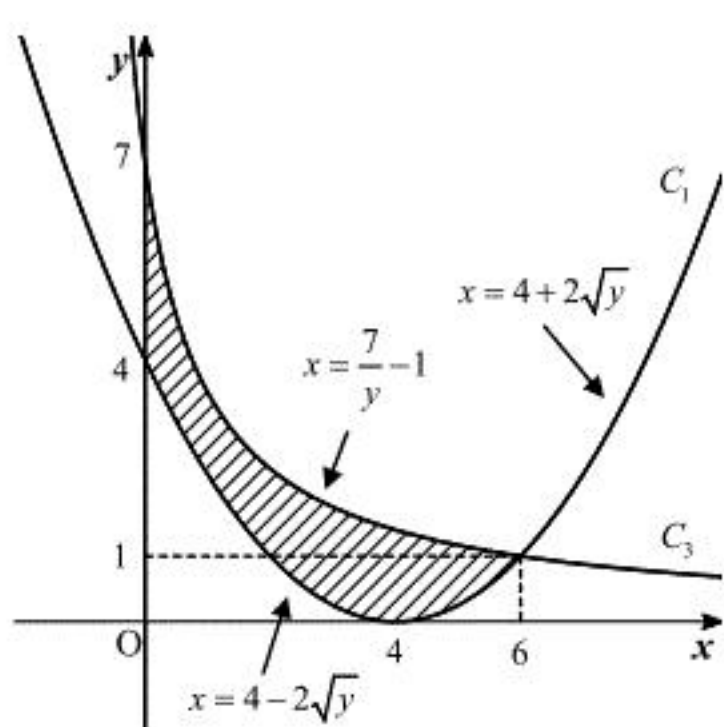
$$C_1: \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{y} & (x \geq 4) \\ x = 4 - 2\sqrt{y} & (0 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

$$C_3: x = \frac{7}{y} - 1 \quad (y \neq 0)$$

と表せる。よって、下図の斜線部を y 軸周りに回転させた回転体の体積を求めればよく、その値は

$$\begin{aligned}& \pi \int_0^1 (4 + 2\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^7 \left(\frac{7}{y} - 1 \right)^2 dy - \pi \int_0^4 (4 - 2\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (16 + 16\sqrt{y} + 4y) dy + \pi \int_1^7 \left(\frac{49}{y^2} - \frac{14}{y} + 1 \right) dy - \pi \int_0^4 (16 - 16\sqrt{y} + 4y) dy \\ &= \pi \left[16y + \frac{32}{3} y\sqrt{y} + 2y^2 \right]_0^1 + \pi \left[-\frac{49}{y} - 14 \log|y| + y \right]_1^7 - \pi \left[16y - \frac{32}{3} y\sqrt{y} + 2y^2 \right]_0^4 \\ &= \pi \left(16 + \frac{32}{3} + 2 \right) + \pi (42 - 14 \log 7 + 6) - \pi \left(64 - \frac{256}{3} + 32 \right) \\ &= \pi (66 - 14 \log 7)\end{aligned}$$

である。

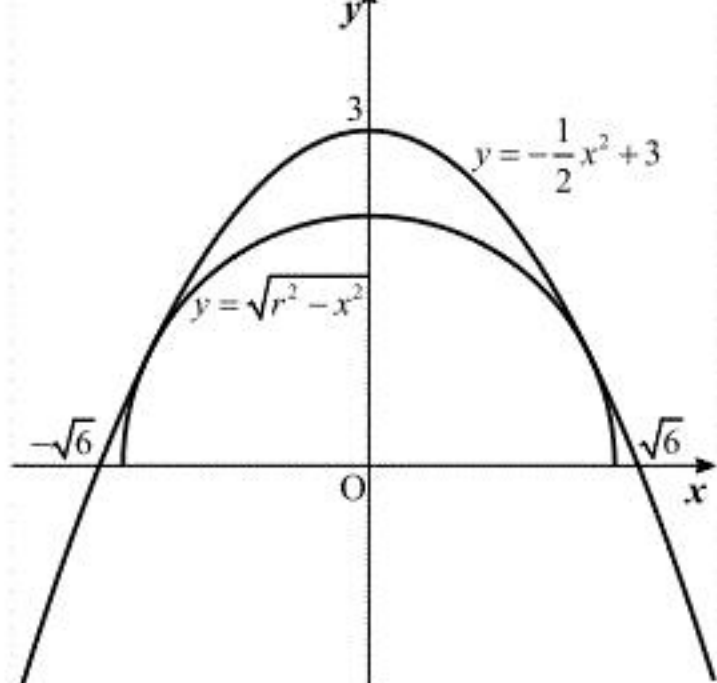


【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ									
	5	2	1	2	1									
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ					
	5	2	5	1	2	2	3	5	5					
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	
	5	2	1	5	2	1	1	1	2	5	5	3	2	

【解説】

(1)



放物線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ はいずれも y 軸に関して対称であるから、放物線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が異なる 2 つの共有点で接するとき、その 2 点は第 1 象限と第 2 象限に存在する。ゆえに、放物線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の第 1 象限における共有点の x 座標を p ($0 < p \leq r$) とすると、

$$f'(x) = -x$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

より、この共有点で放物線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が接することから、

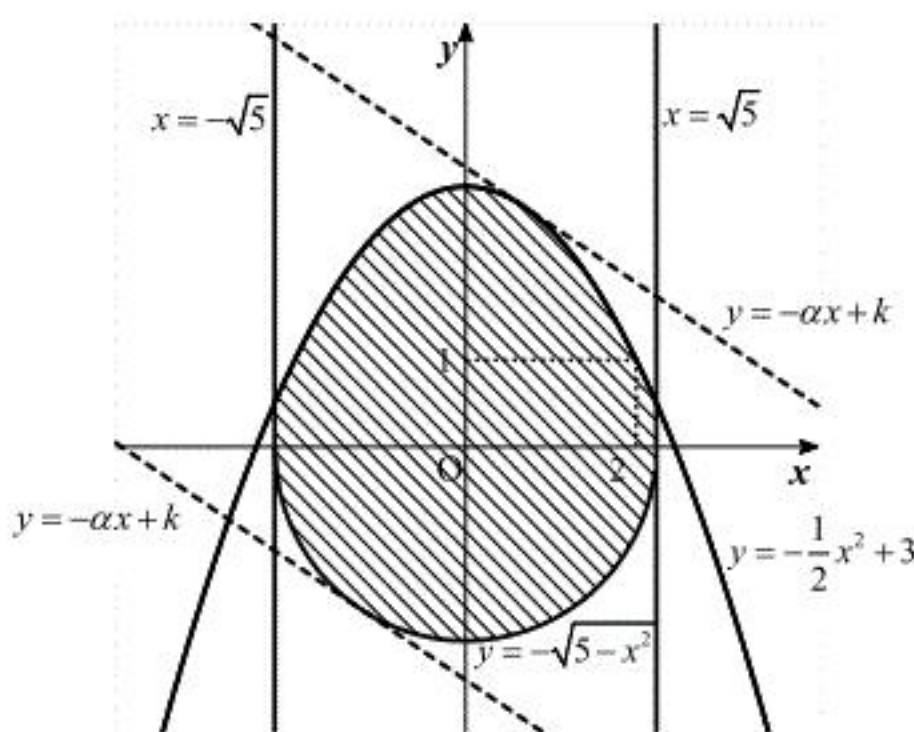
$$\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}p^2 + 3 = \sqrt{r^2 - p^2} \\ -p = -\frac{p}{\sqrt{r^2 - p^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{r^2 - p^2} = -\frac{1}{2}p^2 + 3 \\ \sqrt{r^2 - p^2} = 1 \end{cases} \quad (\because p > 0)$$

が成立する。よって $0 < p \leq r$ に注意してこれらを連立して解くと、

$$p = 2, r = \sqrt{5}$$

が得られる。したがって、第 1 象限における共有点の x 座標は 2 であり、放物線 $y = f(x)$ の方程式から 2 つの共有点の座標は $(-2, 1)$, $(2, 1)$ であるとわかる。

(2)



グラフ上に領域 D を図示すると上図の斜線部ようになる。ただし、 D は境界線をすべて含んでいる。ここで、 $\alpha x + y = k$ とおくと、この方程式は傾きが $-\alpha$ で y 切片が k の直線を表している。この直線を l とし、この直線 l と D が共有点を持つときを考える。放物線 $y = f(x)$ の $x = 2$ における傾きが -2 であることに注意すると、グラフより、 $0 \leq \alpha \leq 2$ の条件下で、直線 l と放物線 $y = f(x)$ が接するとき k は最大値をとり、直線 l と曲線 $y = -g(x)$ が接するとき k は最小値をとる。 k が最大値をとるとき、直線 l と放物線 $y = f(x)$ の 2 つの方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式、

$$-\alpha x + k = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + 2k - 6 = 0$$

が重解を持つ。よってこの 2 次方程式の判別式を D_1 とすれば、

$$\frac{D_1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\alpha^2 + 3$$

が得られ、確かにこのとき重解は α であるから、 $0 \leq \alpha \leq 2$ の条件下で、直線 l と D は共有点を持つ。次に、曲線 $y = -g(x)$ が半円の弧であることに注意すると、 k が最小値をとるとき、原点と直線 l との距離が $\sqrt{5}$ に等しいから、

$$\frac{|\alpha \cdot 0 + 0 - k|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

が成り立ち、グラフより $k < 0$ であるから、

$$k = -\sqrt{5\alpha^2 + 5}$$

が得られる。よって、 α を固定した場合、 $\alpha x + y$ のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{5\alpha^2 + 5} \leq \alpha x + y \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + 3$$

である。次に、 α が $0 \leq \alpha \leq 2$ を動くときの $\alpha x + y$ のとりうる値の最大値は $\frac{1}{2}\alpha^2 + 3$ のとりうる値の最大値と等しく、

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 = 5$$

であり、 $\alpha x + y$ のとりうる値の最小値は $-\sqrt{5\alpha^2 + 5}$ のとりうる値の最小値と等しく、

$$-\sqrt{5 \cdot 2^2 + 5} = -5$$

である。

(3)

$\alpha = 0$ のとき、直線 $y = -\alpha x + k$ と曲線 $y = g(x)$ が接するような k の値は $k = \sqrt{5}$ であり、この

ときの接点は $(0, \sqrt{5})$ である。 $\alpha > 0$ のとき、曲線 $y = g(x)$ が半円の弧であることに注意する

と、直線 $y = -\alpha x + k$ と曲線 $y = g(x)$ が接する場合に、その接点と原点とを通る直線を m とす

れば、2 直線 m , $y = -\alpha x + k$ は直交する。ゆえに、 m は傾きが $\frac{1}{\alpha}$ の直線であり、 $x, \alpha > 0$ であ

ることに注意すると、

$$\frac{1}{\alpha}x = \sqrt{5 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha}x\right)^2 = 5 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$$

$$\therefore x = \alpha\sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}}$$

であるから、曲線 $y = g(x)$ の方程式より求める接点は $\left(\alpha\sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}}, \sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}}\right)$ である。以上より、

$\alpha \geq 0$ の範囲で

$$u(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}}, v(\alpha) = \sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{12}} u(\alpha) d\alpha &= \int_0^{\frac{5}{12}} \alpha\sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}} d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{5}{12}} \frac{\sqrt{5}}{2} (\alpha^2 + 1)' (\alpha^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} d\alpha \\ &= \sqrt{5} \left[(\alpha^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{5}{12}} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\int_0^{\frac{5}{12}} v(\alpha) d\alpha = \int_0^{\frac{5}{12}} \sqrt{\frac{5}{\alpha^2 + 1}} d\alpha$$

であるが、ここで $\alpha = \tan \theta$ とおくと、 $0 \leq \alpha \leq \frac{5}{12}$ のとき $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ としてよく、 $\sin \theta \geq 0$ 、

$\cos \theta > 0$ である。また、 $d\alpha = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ であり、 $\tan \theta = \frac{5}{12}$ をみたす θ を φ ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) とすると、

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{144}{25} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$\therefore \sin \varphi = \frac{5}{13}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{12}} v(\alpha) d\alpha &= \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{5}{\tan^2 \theta + 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{5} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \sqrt{5} \int_0^{\varphi} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{5} \int_0^{\varphi} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{5} \int_0^{\varphi} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^{\varphi} \left(\frac{(\sin \theta)'}{1 - \sin \theta} + \frac{(\sin \theta)'}{1 + \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left[-\log |1 - \sin \theta| + \log |1 + \sin \theta| \right]_0^{\varphi} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right| \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{1 + \frac{5}{13}}{1 - \frac{5}{13}} \right| \\ &= \sqrt{5} \log \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	ア	イ			
	0	1			
(2)	ウ	エ	オ	カ	
	1	4	2	5	
(3)	キ	ク	ケ		
	3	0	1		
(4)	コ	サ			
	3	1			
(5)	シ	ス	セ	ソ	タ
	1	4	4	3	1

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}(31^2 - 1) \div 30 &= 960 \div 30 \\ &= 32\end{aligned}$$

より、 $R[31^2 - 1 : 30] = 0$ である。また、

$$\begin{aligned}31^3 &= 29791 \\ &= 993 \times 30 + 1\end{aligned}$$

より、 $R[31^3 : 30] = 1$ である。

(2)

合同式を用いて考える。

$$\begin{aligned}31^{13} &\equiv 2^{13} \pmod{29} \\ &\equiv (2^5)^2 \cdot 2^3 \\ &\equiv 3^2 \cdot 2^3 \\ &\equiv 72 \\ &\equiv 14\end{aligned}$$

より、 $R[31^{13} : 29] = 14$ である。また、

$$\begin{aligned}31^{13} &\equiv (-2)^{13} \pmod{33} \\ &\equiv -(2^5)^2 \cdot 2^3 \\ &\equiv -(-1)^2 \cdot 2^3 \\ &\equiv -8 \\ &\equiv 25\end{aligned}$$

より、 $R[31^{13} : 33] = 25$ である。

(3)

$$\begin{aligned}31^{130} &= (30 + 1)^{130} \\ &= \sum_{k=0}^{130} {}_{130}C_k \cdot 30^k \cdot 1^{130-k} \\ &= 30^2 \sum_{k=2}^{130} {}_{130}C_k \cdot 30^{k-2} + {}_{130}C_1 \cdot 30^1 + {}_{130}C_0 \cdot 30^0 \\ &= 30^2 \sum_{k=2}^{130} {}_{130}C_k \cdot 30^{k-2} + 3901\end{aligned}$$

となるので、 $R[31^{130} : 900] = R[3901 : 900] = 301$ である。

(4)

$31^2 = 961$ に注意すると、

$$\begin{aligned}31^{103} &\equiv 961^{51} \cdot 31 \pmod{960} \\ &\equiv 1^{51} \cdot 31 \\ &\equiv 31\end{aligned}$$

となるから、 $R[31^{103} : 960] = 31$ である。

(5)

$$\begin{aligned}31^{31} &= (30 + 1)^{31} \\ &= \sum_{k=0}^{31} {}_{31}C_k \cdot 30^k \cdot 1^{31-k} \\ &= 30^3 \sum_{k=3}^{31} {}_{31}C_k \cdot 30^{k-3} + {}_{31}C_2 \cdot 30^2 + {}_{31}C_1 \cdot 30^1 + {}_{31}C_0 \cdot 30^0 \\ &= 30^3 \sum_{k=3}^{31} {}_{31}C_k \cdot 30^{k-3} + 419431\end{aligned}$$

となるから、 $R[31^{31} : 27000] = R[419431 : 27000] = 14431$ である。