

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ				
	4	2	2	7	1	1	3				
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	1	6	1	3	1	2	3	1	2	1	
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ					
	3	6	0	6	4	8					

【解説】

(1)

$2x$ は辺の長さなので、
 $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
である。よって、 $6 < 6 + x$ であるから、3 辺の長さが $2x, x + 6, 6$ である三角形が鋭角三角形となる条件は、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (2x)^2 < (x+6)^2 + 6^2 \\ (x+6)^2 < (2x)^2 + 6^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x - 72 < 0 \\ 3x^2 - 12x > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 24 < 0 \\ x(x-4) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{4+24} < x < 2 + \sqrt{4+24} \\ x < 0, x > 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\sqrt{7} < x < 2 + 2\sqrt{7} \\ x < 0, x > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0, 2 - 2\sqrt{7} < 4$ であるから、 x の範囲は、
 $4 < x < 2 + 2\sqrt{7}$

である。次に、角度が $\frac{\pi}{3}$ となる角の対辺を場合分けして考える。

[1] $\frac{\pi}{3}$ の角の対辺の長さが $2x$ のとき、余弦定理より、

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= (x+6)^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot (x+6) \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+12} = 1 \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$

である。 $4 < x < 2 + 2\sqrt{7}$ より、
 $x = 1 + \sqrt{13}$
となる。

[2] $\frac{\pi}{3}$ の角の対辺の長さが $x + 6$ のとき、余弦定理より、

$$\begin{aligned} (x+6)^2 &= (2x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2x \cdot 6 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 24x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-8) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, 8 \end{aligned}$$

である。 $4 < x < 2 + 2\sqrt{7}$ より、これらの解は共に不適である。

[3] $\frac{\pi}{3}$ の角の対辺の長さが 6 のとき、余弦定理より、

$$\begin{aligned} 6^2 &= (2x)^2 + (x+6)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (x+6) \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow 36 = 3x^2 + 36 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

である。 $4 < x < 2 + 2\sqrt{7}$ より、この解は不適である。

ゆえに、1 つの角が $\frac{\pi}{3}$ となるのは $x = 1 + \sqrt{13}$ のときである。

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{3} \sin x + \cos x) \\ &= \frac{\pi}{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ より、

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

である。したがって

$$\frac{1}{2} \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3}$$

となる。また、3 倍角の公式より、

$$\begin{aligned} z &= \sin 3y + \cos 2y - \sin y \\ &= 3 \sin y - 4 \sin^3 y + 1 - 2 \sin^2 y - \sin y \\ &= -4 \sin^3 y - 2 \sin^2 y + 2 \sin y + 1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $Y = \sin y$ とおくと、 $\frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ より $\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、

$$z = -4Y^3 - 2Y^2 + 2Y + 1$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dY} &= -12Y^2 - 4Y + 2 \\ &= -12 \left(Y + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $\frac{2}{3} \leq Y + \frac{1}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6}$ であるから、

$$\frac{dz}{dY} \leq -12 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{7}{3} = -3 < 0$$

となり、 $\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の範囲で z は Y に対し単調減少である。ゆえに、 $Y = \frac{1}{2}$ のとき z は最大

値

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = 1$$

をとり、 $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき z は最小値

$$z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{3} + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

をとる。ゆえに、

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \leq z \leq 1$$

となる。

(3)

$1+2+3+4+5+6=21$ であるので、6 枚のカードの数の和は奇数である。よって、6 枚のカードすべてを 1 列に並べるとき、前半 3 枚の数の和は後半 3 枚の和より大きい小さいかの 2 通りしかなく、それらはそれぞれ同じだけ並べ方がある。よって、前半 3 枚の数の和が後半 3 枚の和より小さい並べ方は、

$$\frac{6!}{2} = 360 \text{ (通り)}$$

である。また、奇数が少なくとも 1 箇所は連続するか、または、偶数が少なくとも 1 箇所は連続することの余事象は、奇数も偶数も共に連続しないこと、すなわち奇数と偶数が交互に並ぶことである。最初のカードが奇数の場合と偶数の場合の 2 通りの並べ方があることから この並び方は

$$2 \times 3! \times 3! = 72 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める並び方は、

$$6! - 72 = 648 \text{ (通り)}$$

である。

2

(1)

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, t), \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t\right), \overrightarrow{OC} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, t\right)$ である。 $OA \perp OB, OB \perp OC, OA \perp OC$ より、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + t \cdot t &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2} &= 0\end{aligned}$$

である。同様に計算すると、

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2} = 0$$

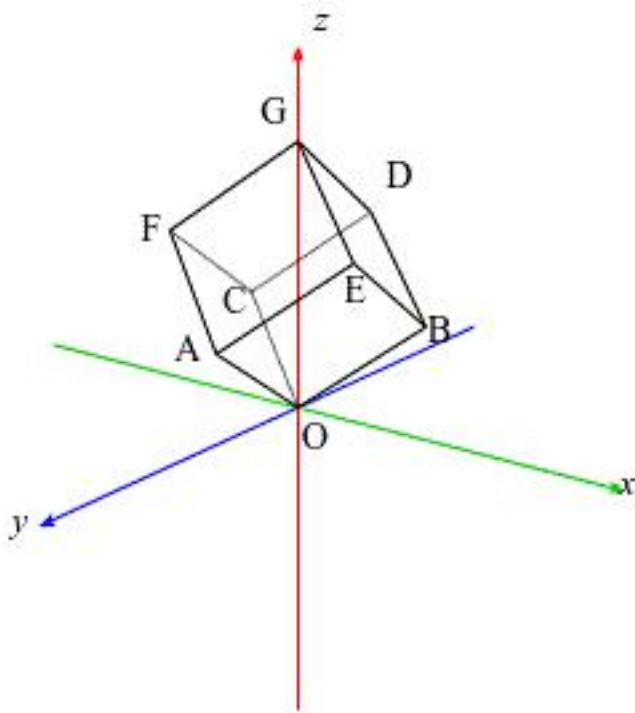
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2} = 0$$

となるので、 $OA \perp OB, OB \perp OC, OA \perp OC$ の必要十分条件は、 $t^2 - \frac{1}{2} = 0$ であり、このとき

$t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。 $t > 0$ より、 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(答) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)



$OA \perp OB, OB \perp OC, OA \perp OC$ より、残りの4つの頂点をD, E, F, Gとすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1, 0, \sqrt{2}) \\ \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

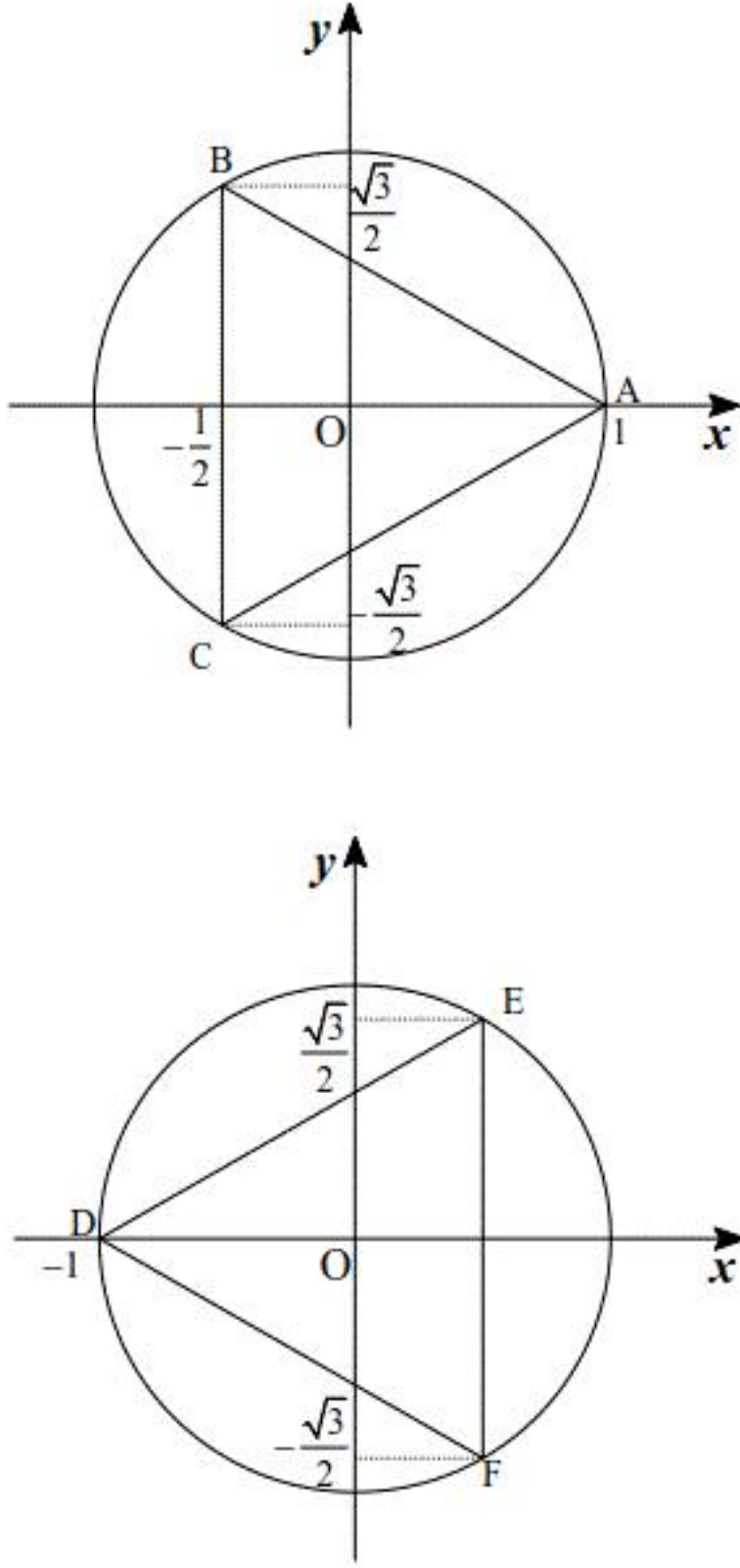
となる。

(答) $(-1, 0, \sqrt{2}), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

(3)

A, B, Cは平面 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 上の中心 $O_1\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 、半径1の円周上にあり、D, E, Fは $z = \sqrt{2}$ 上の

中心 $O_2(0, 0, \sqrt{2})$ 、半径1の円周上にある。よって断面は下図のようになる。



また、

$$AB = BC = AC = \sqrt{3}$$

$$DE = EF = DF = \sqrt{3}$$

より、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は正三角形である。回転体を二つの部分に分けて考える。

[1] $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \leq z \leq \frac{3}{2}\sqrt{2}$ の部分

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は O_1, O_2 を中心とする円に内接する正三角形であるので、回転した図

形は円錐となる。底面の面積は $1^2 \cdot \pi = \pi$ で、高さは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、体積は円錐の体積を2倍

したものであるから、

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi$$

となる。

[2] $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \sqrt{2}$ の部分

z 軸中心に回転してできる図形は z 軸対称である。 $z = p$ における断面を考える。 z 軸対称なのでAFを考える。AF上に $z = p$ となる点Hをとると点Hは平面 $z = p$ における立方体の断面のなかで z 軸との距離が最大となる点である。点Hの座標は実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \\ &= \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{k}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+k)\right)\end{aligned}$$

と表される。よって、 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+k) = p$ より $k = \sqrt{2}p - 1$ となるため、点Hの座標は

$$H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}p + \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}, p\right)$$

となる。よってHと z 軸との距離は、

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}p + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2p^2 - 3\sqrt{2}p + 3}$$

であるので、断面は中心 $(0, 0, p)$ 、半径 $\sqrt{2p^2 - 3\sqrt{2}p + 3}$ の円となる。よって体積は、

$$\begin{aligned}\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2p^2 - 3\sqrt{2}p + 3}\right)^2 dp &= \pi \left[\frac{2}{3}p^3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}p^2 + 3p \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{12}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

となる。

よって、[1], [2]より求める体積は、 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{5}{12}\sqrt{2}\pi = \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi$ となる。

(答) $\frac{3}{4}\sqrt{2}\pi$

3

(1)

$$f(x)=g(x) \\ \Leftrightarrow a=x^3-3x^2-9x+3$$

である。ここで、

$$c(x)=x^3-3x^2-9x+3$$

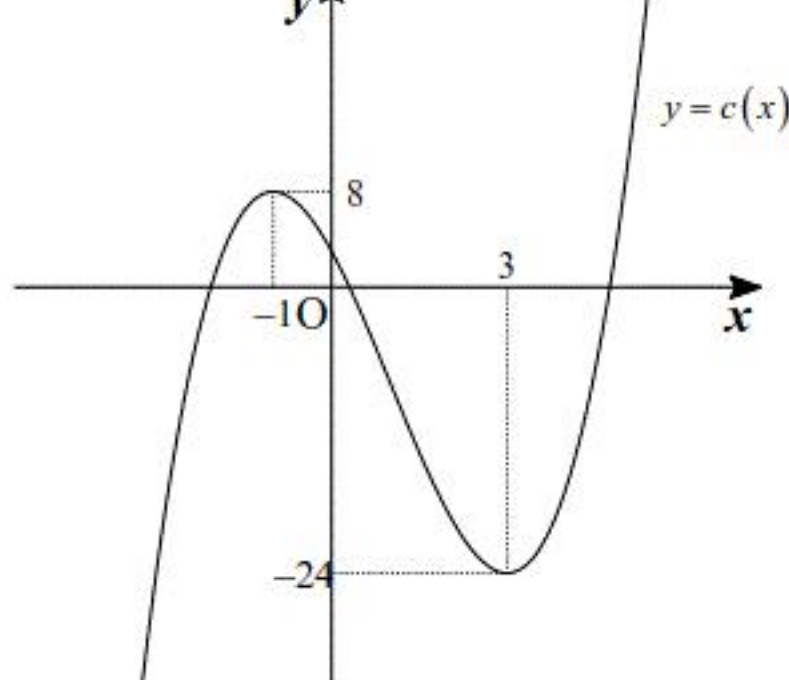
とおく。

$$c'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$$

であり、 $c(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
$c'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$c(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	∞

よって $c(x)$ のグラフは次のようになる。



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ との共有点の個数は、 $y=a$ と $y=c(x)$ との共有点の個数に等しいため、 $-24 < a < 8$ のとき3個、 $a=8, -24$ のとき2個、 $a < -24, 8 < a$ のとき1個となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 3 \text{ 個} & -24 < a < 8 \\ 2 \text{ 個} & a = -24, 8 \\ 1 \text{ 個} & a < -24, a > 8 \end{cases}$$

(2)

$$f'(x)=3x^2-6x-1$$

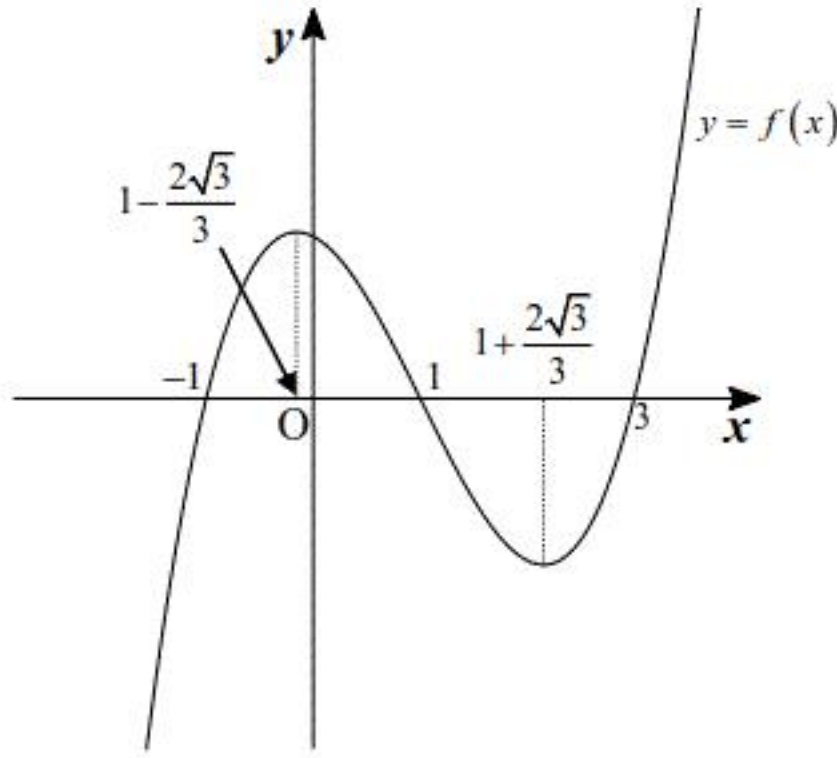
である。 $f'(x)=0$ となる x を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、

$$\alpha=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \beta=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

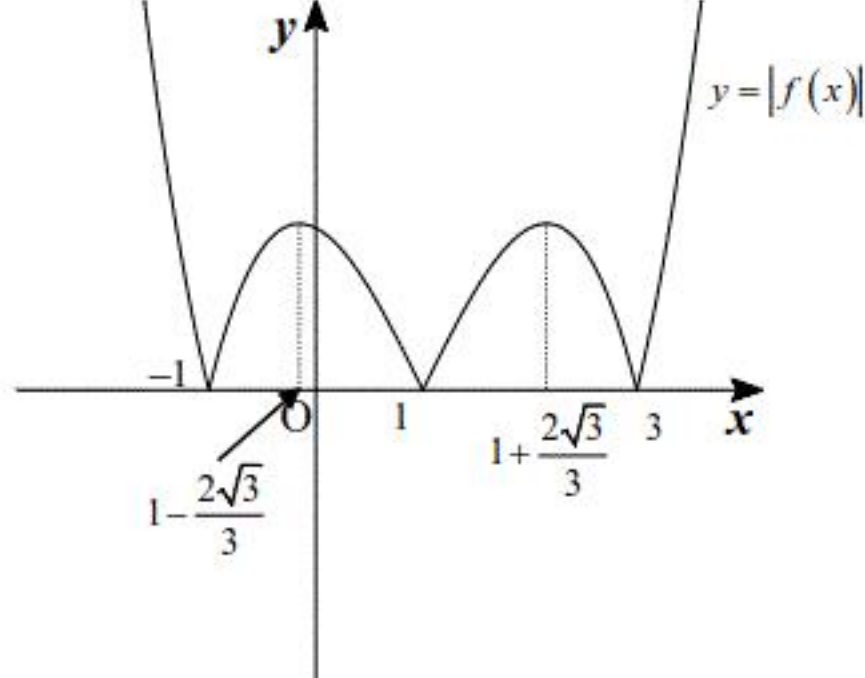
x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	∞

$y=f(x)$ のグラフを書くと次のようになる。



$y=|f(x)|$ は $y=f(x)$ の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返したものであるから、 $y=|f(x)|$ のグ

ラフは下図の実線のようにになる。



(答) 前図

(3)

$$d(x)=-f(x)=-x^3+3x^2+x-3$$

とおく。

$$d'(x)=-3x^2+6x+1$$

より、 $y=d(x)$ 上の点 $(p, d(p))$ における接線の方程式は、

$$y-d(p)=d'(p)(x-p) \\ \Leftrightarrow y=(-3p^2+6p+1)x+2p^3-3p^2-3$$

となる。これが点 $(0, -3)$ を通るから、

$$2p^3-3p^2=0$$

$$\therefore p=0, \frac{3}{2}$$

である。よって $y=-f(x)$ の接線で点 $(0, -3)$ を通るものの傾きは、 $d'(0)=1$ と $d'(\frac{3}{2})=\frac{13}{4}$ で

ある。

(答) $1, \frac{13}{4}$

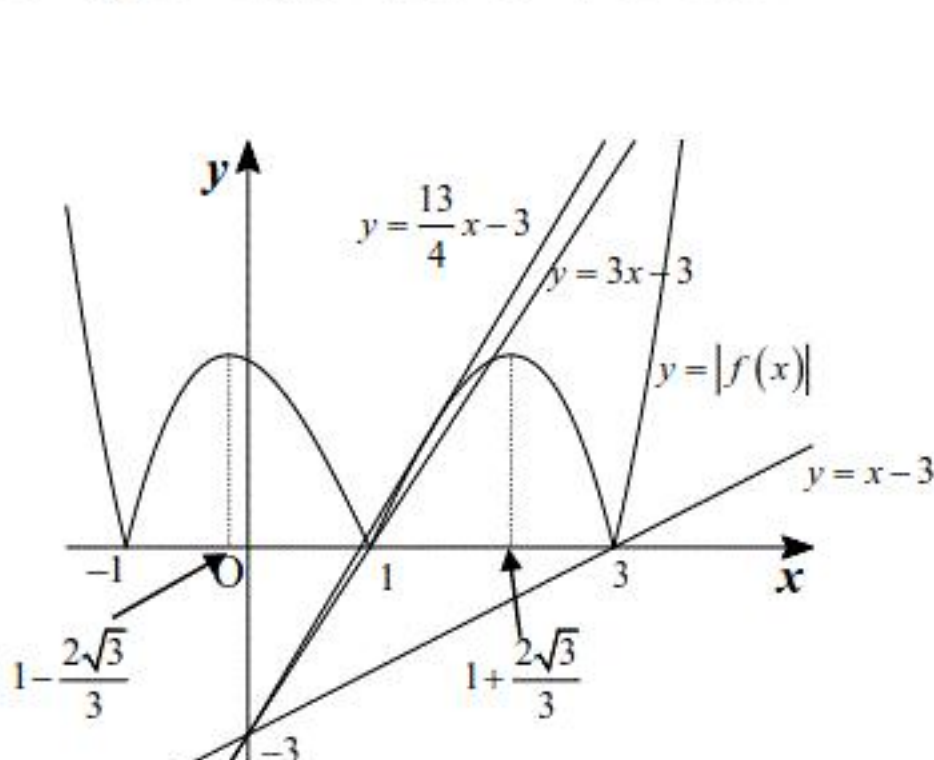
(4)

$h(x)=bx-3 (b > 0)$ は定点 $(0, -3)$ を通ることに注意する。 $h(x)$ が点 $(1, 0)$ を通るとき、 $b=3$

である。また、点 $(3, 0)$ を通るとき、 $b=1$ である。 $-f'(1)=4 > 3$ であることと(3)の結果より、

$b=\frac{13}{4}$ のとき $y=h(x)$ が $x=\frac{3}{2}$ で $y=|f(x)|$ に接することに注意すると、下のグラフを参考に

して、 $y=|f(x)|$ と $y=h(x)$ との共有点の個数は次のようになる。



$$\begin{cases} b > \frac{13}{4} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ b = \frac{13}{4} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 3 < b < \frac{13}{4} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ b = 3 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 1 < b < 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ b = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 0 < b < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

以上より、共有点の個数は、 $3 < b < \frac{13}{4}$ のとき4個、 $b=3, \frac{14}{3}$ のとき3個、 $1 < b < 3, b > \frac{13}{4}$ のとき2個、 $b=1$ のとき1個、 $0 < b < 1$ のとき0個となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} 4 \text{ 個} & 3 < b < \frac{13}{4} \\ 3 \text{ 個} & b = 3, \frac{14}{3} \\ 2 \text{ 個} & 1 < b < 3, b > \frac{13}{4} \\ 1 \text{ 個} & b = 1 \\ 0 \text{ 個} & 0 < b < 1 \end{cases}$$