

1

(1)

p が素数であるとき、 p の約数は1, p の2つである。よって、

$$l(p)=2, a(p, 1)=1, a(p, 2)=p$$

であるから、

$$b(p)=-b(1)=-1$$

となる。

(答) $b(p)=-1$

(2)

p, q が異なる2つの素数であるとき、 pq の約数は1, p, q, pq の4つである。よって、

$$l(pq)=4, a(pq, 1)=1, a(pq, 4)=pq$$

$$\begin{cases} a(pq, 2)=p, a(pq, 3)=q & (p < q \text{ のとき}) \\ a(pq, 2)=q, a(pq, 3)=p & (p > q \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、

$$b(p)=-\{b(1)+b(p)+b(q)\}$$

となる。 p, q は素数であり、(1)の結果より $b(p)=b(q)=-1$ であるから、

$$b(pq)=-\{1-1-1\}=1$$

となる。

(答) $b(pq)=1$

(3)

p が素数、 k が自然数であるとき、 p^k の約数は1, $p, \dots, p^k$ の $k+1$ 個である。よって、

$$l(p^k)=k+1, a(p^k, n)=p^{n-1} \text{ (} n \text{ は1以上} k+1 \text{以下の自然数)}$$

であるから、

$$b(p^k)=-\sum_{n=1}^k b(p^{n-1})$$

となる。また、 $k+1$ は自然数であるから、 k を $k+1$ でおきかえてもよく、

$$b(p^{k+1})=-\sum_{n=1}^{k+1} b(p^{n-1})$$

となる。よって、

$$b(p^{k+1})=-\sum_{n=1}^{k+1} b(p^{n-1})=-\sum_{n=1}^k b(p^{n-1})-b(p^k)=b(p^k)-b(p^k)=0$$

である。以上より、 k が2以上の自然数であるとき、

$$b(p^k)=0$$

である。

(答) $b(p^k)=0$

(4)

p, q, r が異なる3つの素数であるとき、 pqr の約数は1, p, q, r, pq, qr, rp, pqr の8つであり、そのうち最大であるのは pqr である。よって、

$$b(pqr)=-\{b(1)+b(p)+b(q)+b(r)+b(pq)+b(qr)+b(rp)\}$$

となる。 p, q, r は異なる素数であり、(1), (2)の結果より $b(p)=b(q)=b(r)=-1$ 、

$b(pq)=b(qr)=b(rp)=1$ であるから、

$$b(pqr)=-\{1-1-1-1+1+1+1\}=-1$$

となる。

(答) $b(pqr)=-1$

(5)

$p_1, \dots, p_n$ が異なる n 個の素数からなる数列であるとき、(1)の結果より、 k を1以上 n 以下の自然数として $b(p_k)=-1$ である。よって、

$$\sum_{k=1}^n k \cdot b(p_k)^k = \sum_{k=1}^n k \cdot (-1)^k$$

である。 n が偶数であるとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot (-1)^k &= \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k-1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) - 2 \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - \frac{n}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} n \end{aligned}$$

となる。また、 n が奇数であるとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot (-1)^k &= \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (2k-1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) - 2 \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) - \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (n+1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\sum_{k=1}^n k \cdot b(p_k)^k = \begin{cases} \frac{1}{2} n & (n \text{ が偶数であるとき}) \\ -\frac{1}{2} (n+1) & (n \text{ が奇数であるとき}) \end{cases}$$

である。

(答) 上記

(6)

$p_1, \dots, p_n$ が異なる n 個の素数からなる数列であるとき、(1), (2)の結果より、 k を1以上 $n-1$ 以下の自然数として $b(p_k)=-1, b(p_k p_{k+1})=1$ である。よって、 $n \geq 5$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\{b(p_k)+k\}\{b(p_k p_{k+1})+k\}} &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{(3n-1)(n-2)}{4n(n-1)} \end{aligned}$$

となる。また、 $n=3$ のとき、

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\{b(p_k)+k\}\{b(p_k p_{k+1})+k\}} = \frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}$$

であり、 $n=4$ のとき、

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\{b(p_k)+k\}\{b(p_k p_{k+1})+k\}} = \frac{1}{(2-1)(2+1)} + \frac{1}{(3-1)(3+1)} = \frac{11}{24}$$

であるから、 $n=3, 4$ のときも同じ形で表せる。

(答) $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\{b(p_k)+k\}\{b(p_k p_{k+1})+k\}} = \frac{(3n-1)(n-2)}{4n(n-1)}$

(7)

p, q, r が異なる3つの素数であるとき、(1), (2), (4)の結果より $b(p)=b(q)=b(r)=-1$ 、

$b(pq)=b(qr)=b(rp)=1, b(pqr)=-1$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l(n)} \frac{n \cdot b\{a(n, k)\}}{a(n, k)} &= n \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} - \frac{1}{pqr} \right) \\ &= pqr - qr - rp - pq + r + p + q - 1 \\ &= (qr - q - r + 1)p - (qr - q - r + 1) \\ &= (p-1)(qr - q - r + 1) \\ &= (p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

である。素数は2以上の自然数であり、 $p-1, q-1, r-1$ はすべて自然数であるから、

$\sum_{k=1}^{l(n)} \frac{n \cdot b\{a(n, k)\}}{a(n, k)}$ は $p-1$ の倍数である。

(証明終)

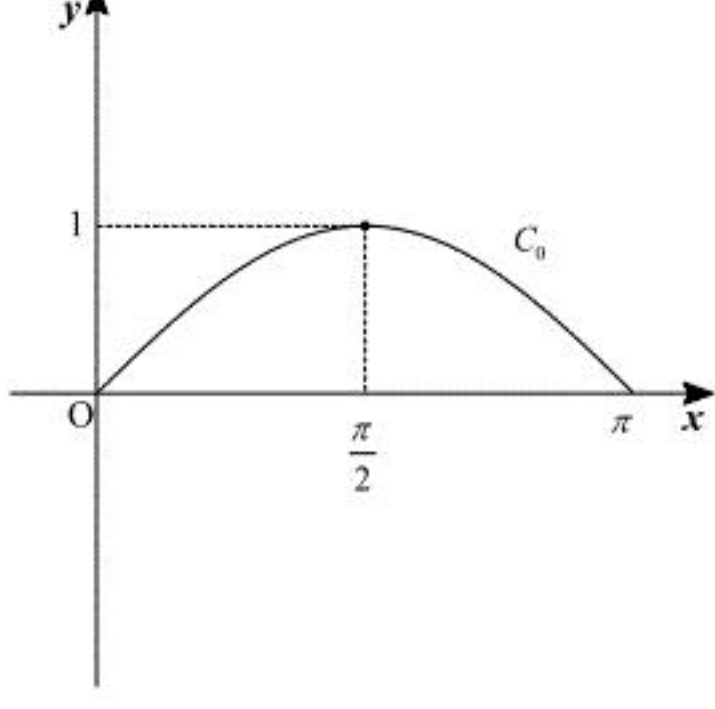
2

(1)

曲線 C_0 は,

$$\begin{cases} x=t \\ y=\sin t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\sin x \end{cases}$$

により定義される。 $0 \leq t \leq \pi$ より、 x の範囲は $0 \leq x \leq \pi$ であるから、曲線 C_0 を図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(2)

$P_s(0)$ の座標は,

$$\begin{cases} x=-s \\ y=s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-s \\ y=-x \end{cases}$$

である。 s が 0 から 1 まで動くから、 x は 0 から -1 まで動く。また、 $P_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の座標は

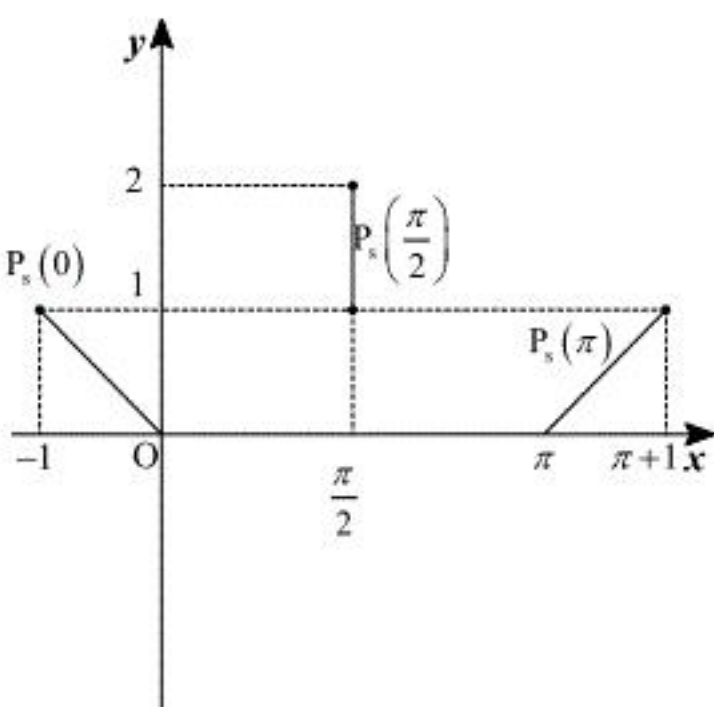
$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \\ y=1+s \end{cases}$$

である。 s が 0 から 1 まで動くから、 y は 1 から 2 まで動く。また、 $P_s(\pi)$ の座標は,

$$\begin{cases} x=\pi+s \\ y=s \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi+s \\ y=x-\pi \end{cases}$$

である。 s が 0 から 1 まで動くから、 x は π から $\pi+1$ まで動く。以上より、

$P_s(0)$, $P_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P_s(\pi)$ の軌跡は以下の通りである。



(答) 前図

(3)

曲線 C_1 は,

$$\begin{cases} x=t-\cos t \\ y=\sin t+1 \end{cases}$$

により定義される。ここで、

$$\frac{dx}{dt}=1+\sin t \\ \frac{dy}{dt}=\cos t$$

であるから、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{1+\sin t}$$

である。

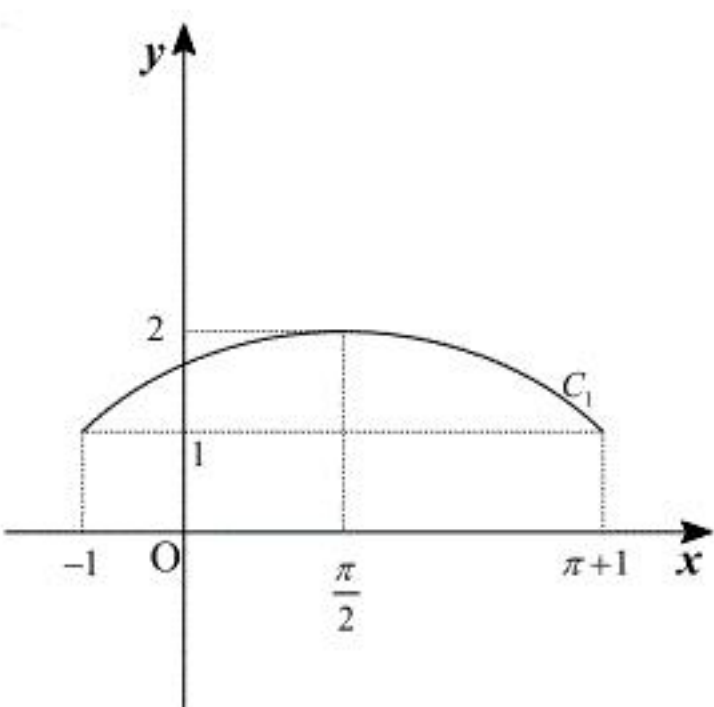
(答) $\frac{\cos t}{1+\sin t}$

(4)

(3)より、 x, y の t に関する増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		正	正	正	
$\frac{dy}{dt}$		正	0	負	
(x, y)	$(-1, 1)$	$\nearrow$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$	$\searrow$	$(\pi+1, 1)$

したがって曲線 C_1 のグラフは以下のようになる。



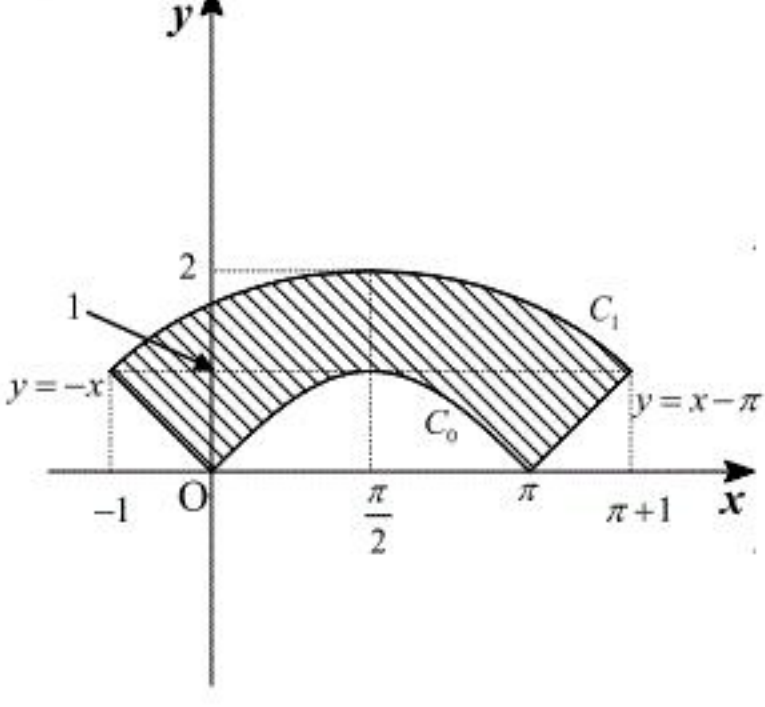
ところで $x=t-s\cos t$, $y=\sin t+s$ をそれぞれ s についての関数と見ると、

$$x=1, y=s+1 \left(t=\frac{\pi}{2} \right) \\ y=\sin t+\frac{t-x}{\cos t} \left(t \neq \frac{\pi}{2} \right)$$

と表される。よって (x, y) は点 $P_0(t)$ から点 $P_1(t)$ の間を直線的に連続して移動し、その直線は

$-\frac{1}{\cos t}=-\frac{1}{(\sin t)'}$ であることから $P_0(t)$ における C_0 の接線と直交する向きであるので、 D は

曲線 C_0 , C_1 と $P_s(0)$, $P_s(\pi)$ の軌跡に囲まれる範囲であると分かる。したがって D は以下の斜線部である。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{\pi+1} (\sin t+1) dx - \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \int_0^{\pi} (\sin t+1) \cdot (1+\sin t) dt - [-\cos t]_0^{\pi} - 1 \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} + 2\sin t + 1 \right) dt - 3 \\ &= \left[-\frac{\sin 2t}{4} - 2\cos t + \frac{3}{2}t \right]_0^{\pi} - 3 \\ &= \frac{3}{2}\pi + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) D : 前図

面積 : $\frac{3}{2}\pi + 1$