

1

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ																						
		5	1	2																						
	(b)	エ	オ																							
		1	5																							
	(c)	カ	キ	ク																						
		1	5	4																						
(2)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ																				
		4	3	7	2	4																				
	(b)	カ	キ	ク	ケ																					
		3	1	3	2																					
	(c)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ																			
		2	3	0	2	1	0																			
(3)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ																			
		2	3	0	2	1	0																			
	(b)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ													
		4	3	2	0	3	8	3	3	0	5	1	4													
	(c)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ										
		2	3	0	2	1	0	3	8	3	3	0	5	1	4											

【解説】

(1)

(a)

A


【解説】

(1)

(a)

条件より、上のような図になっている。 $\angle BAC = \angle DBC$ と $\angle ACB = \angle BCD$ より、 $\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ は相似である。よって、
 $AC:BC = BC:CD$
 $\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}:1 = 1:CD$
 $\therefore CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
である。

(b)

(a)の結果より、 $AD = AC - CD = 1$ である。また、 $\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ は相似であることより、 $BD = BC = 1$ である。よって、 $\triangle ABD$ は $DA = DB$ の二等辺三角形となるから、
 $\angle ABD = \angle DAB = \theta$
であり、さらに
 $\angle ACB = \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 2\theta$
となる。よって、 $\triangle ABC$ の内角の和に着目すると、
 $\theta + 2\theta + 2\theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{5}\pi$
である。

(c)

$\triangle BCD$ に余弦定理を用いると、
$$\cos \theta = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

である。

(d)

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

である。ここで、 $5\theta = \pi$ より $3\theta = \pi - 2\theta$, $4\theta = \pi - \theta$ であるから、
$$\begin{aligned} \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta &= \cos^2(\pi - 2\theta) + \cos^2(\pi - \theta) \\ &= \cos^2 2\theta + \cos^2 \theta \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(a)

三角関数の合成公式より
$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin 2x - 2\cos 2x \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right) \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、
$$f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

である。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{15}{4}\pi$ であるから、
$$\begin{aligned} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{29}{24}\pi, \frac{37}{24}\pi \end{aligned}$$

である。よって、与えられた方程式は解を4個もち、その中で値の最も大きな解は
$$x = \frac{37}{24}\pi$$

である。

(b)

$\cos x \neq 0$ のとき、
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2\sin x \cos x - \sin^2 x + 1}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 1} \\ &= \frac{2\sin x \cos x + \cos^2 x}{2\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 1}{2 - 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = t$ とおき、
$$h(t) = \frac{2t+1}{t^2-2t+2}$$

と定めると、 $h(\tan x) = g(x)$ となり、 t は実数全体を動く。ここで、
$$h'(t) = \frac{2(t^2-2t+2) - (2t+1)(2t-2)}{(t^2-2t+2)^2} = \frac{-2(t^2+t-3)}{(t^2-2t+2)^2}$$

より、 $h(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	...	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	...
$h'(t)$	-	0	+	0	-
$h(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より、 $h(t)$ の極小値および極大値を計算すると、
$$\begin{aligned} h\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) &= \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ h\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) &= \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

となる。また、
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = 0$$

である。一方、 $\cos x = 0$ の場合は $g(x) = 0$ である。以上より、
$$\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leq g(x) \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

である。

(3)

(a)

与えられた条件より、直方体を図示すると上図のようになる。まず、 $OP = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$ であることと、直方体の対角線が12であることより、
 $PQ^2 = 12^2$
 $\Leftrightarrow OP^2 + OQ^2 = 144$
 $\therefore OQ = 2\sqrt{30}$
である。よって、円Cの半径はOQの長さに等しく $2\sqrt{30}$ である。ここで、 $Q(x, y, q)$ とおくと、線分OPと線分OQが直交することより
 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2q = 0$
である。よって
$$\begin{aligned} OQ^2 &= x^2 + y^2 + q^2 \\ &= x^2 + (-x-2q)^2 + q^2 \\ &= 2(x+q)^2 + 3q^2 \\ &\geq 3q^2 \end{aligned}$$

となる。これと $OQ = 2\sqrt{30}$ より
 $3q^2 \leq 120 \Leftrightarrow -2\sqrt{10} \leq q \leq 2\sqrt{10}$
となる。

(b)

円Cを含む平面と線分OPは直交することから、線分RHは線分OPと平行である。よって、 k を実数として
 $\overrightarrow{RH} = k(1, 1, 2)$
と表せる。このとき、
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RH} = (3+k, -5+k, 6+2k)$$

となり、線分OPと円Cを含む平面上に存在する線分OHは直交するから、
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3+k, -5+k, 6+2k) \cdot (2, 2, 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3+k) \cdot 1 + (-5+k) \cdot 1 + (6+2k) \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。よって
$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

である。

上図のように点A, Bを定めるとき、三平方の定理より
$$QR = \sqrt{QH^2 + RH^2}$$

であるから、線分QRの長さは、線分QHの長さが最小となると、すなわち点Qが点Aと重なるとき最小に、線分QHの長さが最大となると、すなわち点Qが点Bと重なるとき最大になる。ここで、 $OQ = 2\sqrt{30}$ であり、
$$\begin{aligned} OH &= \frac{4}{3}\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} = \frac{4}{3}\sqrt{30} \\ RH &= \frac{5}{3}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \end{aligned}$$

であるから、
$$\begin{aligned} AH &= OA - OH = OQ - OH = \frac{2}{3}\sqrt{30} \\ BH &= OB + OH = OQ + OH = \frac{10}{3}\sqrt{30} \end{aligned}$$

となり、
$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{30}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{30} \\ BR &= \sqrt{\left(\frac{10}{3}\sqrt{30}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)^2} = 5\sqrt{14} \end{aligned}$$

となる。以上より、線分OQの長さがとりうる値の範囲は
$$\sqrt{30} \leq QR \leq 5\sqrt{14}$$

である。

〔解答〕

(1)	(あ)	(い)
	$\sqrt{3}$	2
(2)	(う)	
	$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$	
(3)	(え)	
	$9-\sqrt{39}$	

〔解説〕

(1)

AP+BP=4より、点Pは点A(-1, 0)、点B(1, 0)を焦点とする楕円上を動く。楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

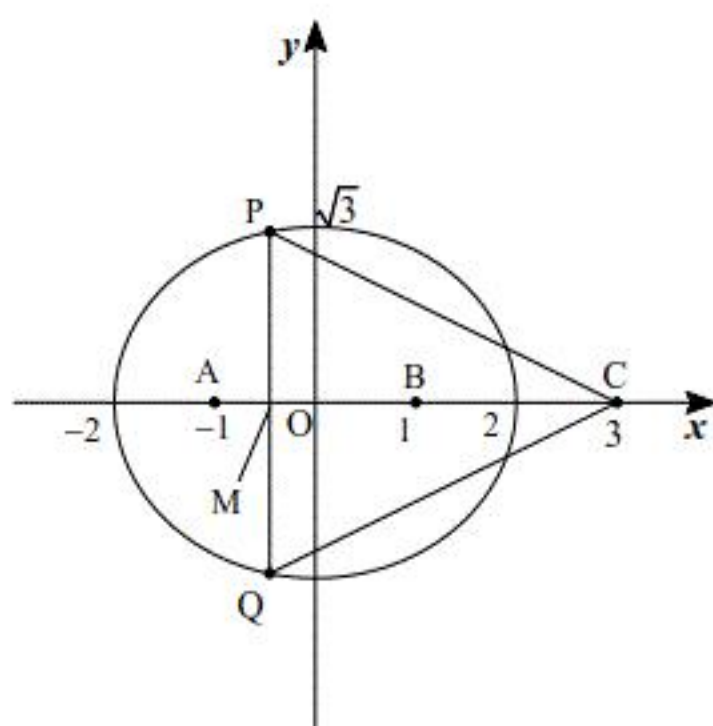
とおくと、 $a=2, b=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$ であるから、 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ をパラメータとして、点

Pの座標を $(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ と媒介変数表示できる。このとき、

$$OP^2 = 4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 3 + \cos^2\theta$$

であるから、 $3 \leq OP^2 \leq 4$ となり、OPの最小値は $\sqrt{3}$ 、最大値は2となる。

(2)



x 軸に関して点Pと点Qは対称であり、点Cは x 軸上の点であるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ としても一般性を失わない。このとき、 $\triangle CPQ$ の面積を $S(\theta)$ 、辺PQと x 軸の交点をMとおくと、

$$\begin{aligned} S(\theta) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot PM \cdot CM \\ &= \sqrt{3} \sin\theta \cdot (3 - 2\cos\theta) \\ &= 3\sqrt{3} \sin\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 3\sqrt{3} \cos\theta - 2\sqrt{3} \cos 2\theta \\ &= -\sqrt{3} (4\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より、 $S'(\theta)=0$ となるのは

$$\cos\theta = \frac{3-\sqrt{41}}{8}$$

の場合である。これを満たす θ を α とおくと、 $S(\theta)$ の増減は次のようになる。

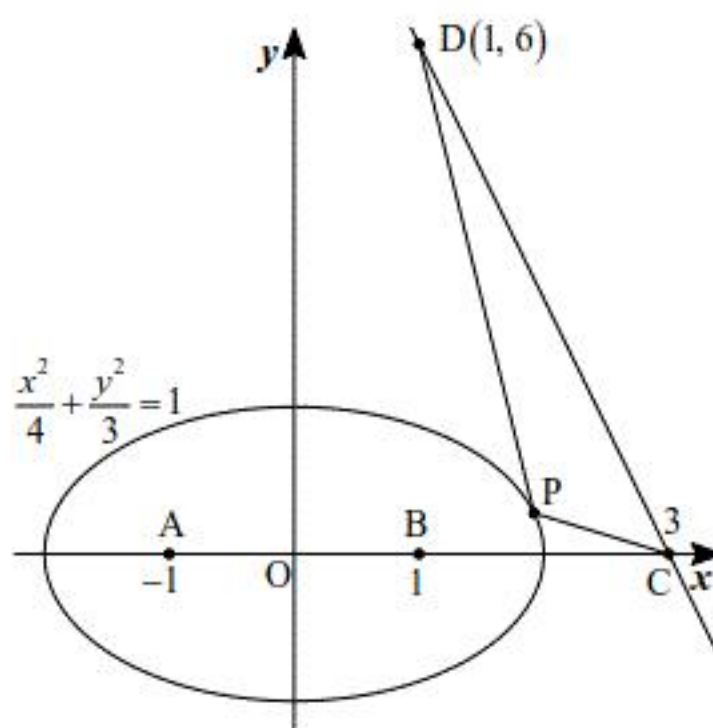
θ	0	...	α	...	π
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$	0	↗	極大	↘	0

したがって、 $S(\theta)$ が最大となる点Pの x 座標は

$$2\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3-\sqrt{41}}{8} = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$$

である。

(3)



$$\overline{CD} = (-2, 6)$$

$$\overline{CP} = (2\cos\theta - 3, \sqrt{3}\sin\theta)$$

であるから、 $\triangle CPD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| -2 \cdot \sqrt{3} \sin\theta - 6 \cdot (2\cos\theta - 3) \right| = \sqrt{3} \left| 3\sqrt{3} - (\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta) \right|$$

となる。ここで、 β を $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{13}}, \sin\beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ を満たす定数とすると、

$$\begin{aligned} \sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta &= \sqrt{13} \left(\frac{1}{\sqrt{13}} \sin\theta + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \cos\theta \right) \\ &= \sqrt{13} \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\beta \leq \theta + \beta < 2\pi + \beta$ であるから、

$$-\sqrt{13} \leq \sqrt{13} \sin(\theta + \beta) \leq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} - \sqrt{13} \leq 3\sqrt{3} - (\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta) \leq 3\sqrt{3} + \sqrt{13}$$

$$\therefore 9 - \sqrt{39} \leq \sqrt{3} \left| 3\sqrt{3} - (\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta) \right| \leq 9 + \sqrt{39} \quad (\because 3\sqrt{3} > \sqrt{13})$$

より、 $\triangle CDP$ の面積の最小値は $9 - \sqrt{39}$ である。

【解答】

(1)		(あ)			
		$\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)$			
(2)	(a)	(い)	(う)	(え)	(お)
		$-e^{-\pi}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$
	(b)	(か)			
		$\frac{1}{4}\left(e^{-\pi} + e^{-2\pi} - 2e^{-\frac{5\pi}{2}}\right)$			

【解説】

(1)

 $I = \int e^{-2x} \cos 2x dx$ とおく。この不定積分は、部分積分法を用いることにより

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^{-2x} \cos 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cos 2x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} (\cos 2x)' dx \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cos 2x - \int e^{-2x} \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x} \sin 2x - \int \frac{1}{2}e^{-2x} (\sin 2x)' dx \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x} \sin 2x - I
 \end{aligned}$$

$$\therefore I = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と求まる。

(2)

 曲線 $C_1: \begin{cases} x = e^{-\theta} \cos \theta \\ y = e^{-\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\right)$ と、直線 $y = x$ に関して C_1 と対称な曲線 C_2 を考える。

(a)

関数 $f(\theta), g(\theta)$ を

$$\begin{cases} f(\theta) = e^{-\theta} \cos \theta \\ g(\theta) = e^{-\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\right)$$

とおく。曲線 C_1 の x 軸との交点において、

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \\
 \Leftrightarrow g(\theta) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \theta &= \pi
 \end{aligned}$$

となるから、この点の x 座標は

$$x = f(\pi) = -e^{-\pi}$$

である。同様に、 y 軸との交点において、

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 \Leftrightarrow f(\theta) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となるから、この点の y 座標は

$$y = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

である。また、関数 $e^{-\theta} \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\right)$ ($= f(\theta)$) について、導関数は

$$f'(\theta) = -e^{-\theta} \cos \theta + e^{-\theta} (-\sin \theta) = -e^{-\theta} (\sin \theta + \cos \theta) = -\sqrt{2}e^{-\theta} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となるから、関数 $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$

したがって、関数 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{3\pi}{4}$ で極値 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$ をとる。

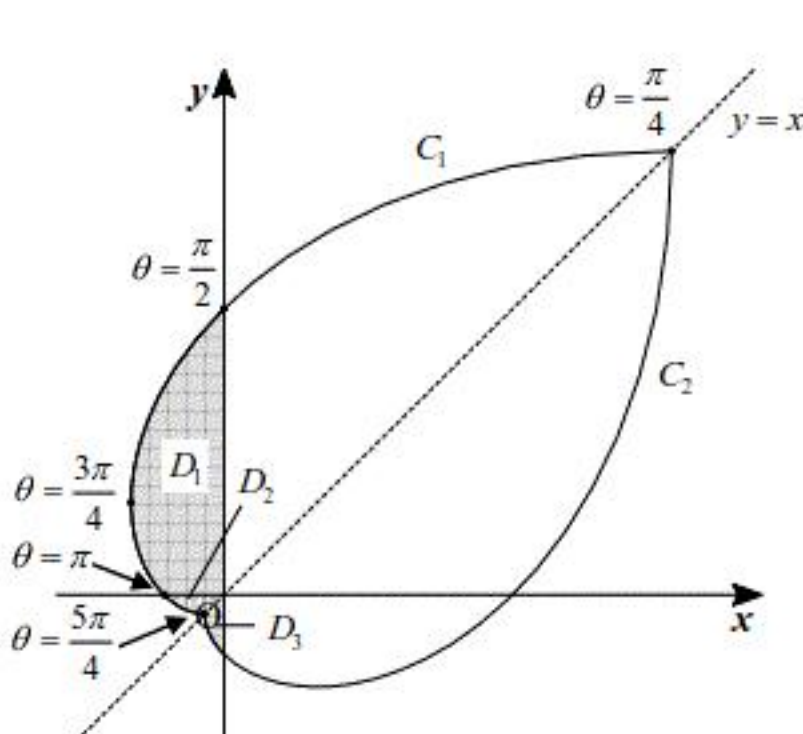
(b)

(2)(a)と同様にして、関数 $g(\theta)$ の導関数は

$$g'(\theta) = -e^{-\theta} (\sin \theta - \cos \theta) = -\sqrt{2}e^{-\theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

となるから、曲線 C の進行表は以下のようになる。

θ	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3\pi}{4}$	...	$\frac{5\pi}{4}$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$g'(\theta)$	0	-	-	-	0
(x, y)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$	$\checkmark$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$	$\searrow$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)$

よって、曲線 C_1 および C_2 は以下の図のようになる。上図の斜線部の領域を D とおき、 D の面積を S とおく。また、 D_1 : D かつ $x \leq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域 D_2 : D かつ $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ かつ $y \geq x$ を満たす領域 D_3 : D かつ $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ かつ $y \leq x$ を満たす領域とおき、 D_n ($n=1, 2, 3$) の面積を S_n ($n=1, 2, 3$) とおく。このとき、 S は S_1, S_2, S_3 を用いて

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

と表せるが、 D_2 を直線 $y = x$ に関して対称に移動した領域が D_3 となるから、 $S_2 = S_3$ を満たすため、 S は S_1, S_2 を用いて

$$S = S_1 + 2S_2$$

と表せる。ここで、 S_1 は

$$S_1 = \int_{y=0}^{y=e^{-\frac{\pi}{2}}} (0-x) dy = \int_{\theta=\pi}^{\theta=\frac{\pi}{2}} -f(\theta) \cdot g'(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta$$

と立式でき、同様にして、 S_2 は

$$S_2 = \int_{y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}}^{y=0} (0-x) dy - \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}} \right)^2 = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta - \frac{1}{4}e^{-\frac{5\pi}{2}}$$

と立式できる。ここで、不定積分 $\int e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta$ について

$$\begin{aligned}
 \int e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta &= \int e^{-2\theta} (\cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
 &= \int e^{-2\theta} \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int e^{-2\theta} d\theta + \frac{1}{2} \int e^{-2\theta} \cos 2\theta d\theta - \frac{1}{2} \int e^{-2\theta} \sin 2\theta d\theta
 \end{aligned}$$

となり、(1)の結果および、それと同様に考えることで、 C を積分定数として

$$\int e^{-2\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4}e^{-2\theta} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) + C$$

$$\int e^{-2\theta} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4}e^{-2\theta} (-\sin 2\theta - \cos 2\theta) + C$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 &\int e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{4}e^{-2\theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}e^{-2\theta} \{(\sin 2\theta - \cos 2\theta) - (-\sin 2\theta - \cos 2\theta)\} + C \\
 &= -\frac{1}{4}e^{-2\theta} (1 - \sin 2\theta) + C
 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + 2S_2 \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta + 2 \left\{ \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} e^{-2\theta} \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta - \frac{1}{4}e^{-\frac{5\pi}{2}} \right\} \\
 &= \left[-\frac{1}{4}e^{-2\theta} (1 - \sin 2\theta) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 2 \left[-\frac{1}{4}e^{-2\theta} (1 - \sin 2\theta) \right]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} - \frac{2}{4}e^{-\frac{5\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{4}(e^{-\pi} - e^{-2\pi}) + \frac{2}{4}e^{-2\pi} - \frac{2}{4}e^{-\frac{5\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left(e^{-\pi} + e^{-2\pi} - 2e^{-\frac{5\pi}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

となる。