

T 1

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより5ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ン までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、キ などは既出の キ を表す。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + c$$

のグラフを F とし、放物線 F は点 $(1, 7)$ を通るものとする。

このとき、 $c =$ ア イ であり、放物線 F は 頂点が $\left(\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}, \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \right)$ で、2 点 $(7, \text{キ})$, $(\text{キ}, \text{ク})$ を通る。

この $f(x)$ を用いて、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めると、初項から第 20 項までの和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$$

は ケ コ である。また、無限級数

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

は収束して、その和 S は循環小数であり 分数に直すと $S = \frac{\text{サ} \text{シ}}{\text{ス} \text{セ} \text{ソ}}$ となる。

右のページは白紙です。

(2) (a) 三角関数の加法定理により

$$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{タ}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}(\sqrt{\boxed{\text{テ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}})$$

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \frac{1}{\boxed{\text{ナ}}}(\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}})$$

が分かる。

(b) 係数が実数である 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が 3 つの解 α, β, γ をもち、 $\gamma = \sqrt{2} \cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ であるとする。因数定理から ① は適当な実数 p, q に対して

$$(x - \gamma)(x^2 + px + q) = 0$$

と書ける。複素数平面上で、 α の絶対値は 1、偏角 $\arg \alpha$ は $0 \leq \arg \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲にあり、3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ は直角三角形であるとする。このとき $\arg \alpha = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi$ であり、

$$a = \frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}(-\boxed{\text{ヒ}} + \sqrt{\boxed{\text{フ}}}), \quad b = \frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}(\boxed{\text{ヘ}} - \sqrt{\boxed{\text{ホ}}})$$

$$c = \frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}(-\boxed{\text{マ}} + \sqrt{\boxed{\text{ミ}}})$$

であることが分かる。

右のページは白紙です。

(3) 座標空間に 2 点

$$A(-3, 4, 2\sqrt{3}), \quad B(0, 0, \sqrt{3})$$

をとり、座標空間の xy 平面上で原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円の周上の動点を P とする。以下では、動点 P はこの円周全体を動くものとする。

内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$ のとり得る値の範囲は

$$-\boxed{\Delta} \leq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} \leq \boxed{\times}$$

である。線分 AP の長さの最大値は $\boxed{\text{モ}}\sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}$ であり、最小値は $\boxed{\text{ユ}}\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}$

である。線分 AP の長さが最大となるのは、点 P の座標が $\left(\frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}, -\frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}, 0\right)$

のときである。また、 $\triangle ABP$ の面積の最大値は $\boxed{\text{ロ}}\sqrt{\boxed{\text{ワ}}}$ であり、最小値は $\boxed{\text{ヲ}}\sqrt{\boxed{\text{ン}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 関数 $f(x)$ を次で定める。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}} \quad (x > -7)$$

(1) 座標平面において $y = f(x)$ で定まる曲線を C とする。定数 $a > -7$ に対して、 C 上の点 $A(a, f(a))$ をとる。点 A における曲線 C の接線を ℓ とし、接線 ℓ と x 軸の交点を P とする。

(a) 点 P の x 座標を a を用いて表せ。

(b) 正の数 m に対して、線分 AP を $1:m$ に内分する点 Q の x 座標を q とする。このとき、 $\frac{f(q)}{f(a)}$ を m を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

とする。

(a) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$f(k) > \int_k^{k+1} f(x) dx > f(k+1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示し、次に $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$S_n - f(n) > \int_1^n f(x) dx > S_n - f(1) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

(b) 定積分 $\int_1^{2018} f(x) dx$ の値を求めよ。さらに $N \leq S_{2018}$ を満たす最大の整数 N を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 a を正の実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} a^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$$

と定める。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と不定積分 $\int \{f(x)\}^2 dx$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ は次の条件 (*) を満たすものとする。

「 $f'(b) = 0$ かつ $0 < b < 1$ を満たす b がただ 1 つ存在する」 (*)

(a) このとき a のとり得る値の範囲を求め、 $a^{\frac{1}{t}}$ の値を求めよ。

(b) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸 および 2 直線 $x = b$, $x = 1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(a)$ とおく。次の極限を求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} (\log a) V(a)$$

ここで、 $\log$ は自然対数を表す。

(3) 定数 $t \geq 1$ と正の数 h に対して、

$$0 < (a+h)^{\frac{1}{t}} - a^{\frac{1}{t}} \leq \left(\frac{1}{t} a^{\frac{1}{t}}\right) \frac{h}{a}$$

が成り立つことを示せ。また、次の極限を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_1^2 \frac{1}{t} (1+h)^{\frac{1}{t}} dt$$

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

