

U 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から マ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -3x + \sqrt{x^2 - 1} \quad (|x| > 1)$$

によって定める。

(a) 関数 $f(x)$ は $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \sqrt{\text{ウ}}$ で極大値 $-\text{エ} \sqrt{\text{オ}}$ をとる。

(b) 定数 a, b をそれぞれ

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

とすると、 $a = -\text{カ}$ 、 $b = -\text{キ}$ である。また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{x f(x) - ax^2\} = -\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{x f(x) - bx^2\} = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) (a) 方程式 $2^{4x^2 \log_2 x} = x$ の実数解の個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個である。

(b) 定数 a, b をそれぞれ $a = \log_{10} 2 = 0.3010\dots$, $b = \log_{10} 3 = 0.4771\dots$ とする。このとき、

$$\log_{10} \frac{9}{125} = \boxed{\text{ス}} a + \boxed{\text{セ}} b - \boxed{\text{ソ}}$$
$$\log_{\frac{1}{100}} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} a - \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} b$$

と表される。また、自然数 n に対して、 $\left(\frac{3}{2}\right)^k$ の整数部分が n 桁の数となる自然数 k のうち最大のものを k_n で表す。このとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}$$

の整数部分は $\boxed{\text{ト}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1 = -\frac{18}{5}$ で、

$$a_{n+1} - 3a_n = 4(a_n + 3^n)(a_{n+1} + 3^{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。 $b_n = a_n + 3^n$ とおくと、

$$b_{n+1} - \boxed{\text{ナ}} b_n = 4b_n b_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。これより $b_n \neq 0$ ならば $b_{n+1} \neq 0$ であることが分かり、 $b_1 = -\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ なので、数学的帰納法によりすべての n で $b_n \neq 0$ であることが分かる。そこで、 $c_n = \frac{1}{b_n}$ とおいて、 c_n を求めると

$$c_n = \left(\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}} \right)^n - \boxed{\text{ノ}}$$

である。したがって

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ハ}} \cdot \boxed{\text{ヒ}}^n}{1 - \boxed{\text{フ}} \cdot \boxed{\text{ヘ}}^n}$$

となる。数列 $\left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{d^n} \right\}$ が $n \rightarrow \infty$ のときに 0 でない実数に収束するよう

な正の数 d は $\boxed{\text{ホ}}$ であり、そのときの極限値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{d^n} = -\boxed{\text{マ}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題

2

の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2

座標平面において、曲線 $y = \sin x$ の $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲にある部分の図形を C とする。実数 a, b に対し、図形 C を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動して得られる図形を $D_{a,b}$ と表す。ただし、実数 a は $0 < a < 2\pi$ の範囲にあるものとする。

- (1) 図形 $D_{a,b}$ の x, y についての方程式を x の動く範囲を含めて表せ。
- (2) 実数 a ($0 < a < 2\pi$) に対して、図形 C と図形 $D_{a,b}$ が共有点をもつような b の範囲を a を用いて表せ。必要であれば公式

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

を用いてよい。

- (3) $b = \frac{1}{2}$ とする。 C と $D_{a, \frac{1}{2}}$ が共有点をもつための a についての必要十分条件は、ある $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ($0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$) を用いて

$$\theta_1 \leq a \leq \theta_2 \quad \text{または} \quad \theta_3 \leq a \leq \theta_4$$

と表せる。 θ_2, θ_3 と $\sin \theta_1, \sin \theta_4$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題

3

の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3

座標平面上の楕円 $(x+1)^2 + 2y^2 = 2$ を C とする。

- (1) 楕円 C を極座標 (r, θ) を用いて極方程式で表し, r を θ を用いて表せ。ただし, 極座標 (r, θ) の極は原点, 始線は x 軸の正の部分とする。
- (2) 2つの直線 ℓ_1 と ℓ_2 は原点を通り, 垂直であるとする。 ℓ_1 と楕円 C の交点を A と B , ℓ_2 と楕円 C の交点を P と Q とおいたとき,

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{PQ}$$

は垂直な2直線 ℓ_1 と ℓ_2 の取り方によらず一定であることを示し, その値を求めよ。

- (3) 楕円 C の接線のうち, 点 $(1, 0)$ を通り y 切片が正であるものを ℓ とする。

- (a) 接線 ℓ の方程式, および C と ℓ の接点の座標を求めよ。
- (b) 楕円 C と接線 ℓ と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(30点)

右のページは白紙です。