

W 1

# 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

## [注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。  
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
  - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。  
2 箇所以上マークすると採点されません。  
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
  - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。  
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとし、なお、ア は既出の ア を表します。

1

(1) 原点 O を中心とする半径  $r$  ( $r > 0$ ) の円に内接する四角形 ABCD があり、  
 $AB = 7$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = \sqrt{39}$  であるという。

(a)  $r = \sqrt{\frac{\text{ア}}{\text{イ}}}$  である。

(b)  $CD = 4$  のとき、 $AD = -\text{ウ} + \text{エ} \sqrt{\text{オ}}$  である。

(c)  $CD = 3AD$  のとき、四角形 AOCD の面積は  $\frac{\text{カキ}}{\text{ク}} \sqrt{\text{ケ}}$  となる。

(2) 成功か失敗かのどちらかが起こる実験を繰り返し行う。ある回に実験が成功したとき次の回にも実験が成功する確率は  $\frac{1}{4}$  であり、ある回に実験が失敗したときに次の回にも実験が失敗する確率は  $\frac{3}{5}$  であるという。1 回目の実験が成功する確率を  $\frac{1}{3}$  とし、 $n$  回目 ( $n$  は自然数) の実験が成功する確率を  $p_n$  とする。

(a)  $p_2 = \frac{\text{コ}}{\text{サシ}}$ ,  $p_3 = \frac{\text{スセソ}}{\text{タチツ}}$  である。

(b)  $p_{n+1}$  を  $p_n$  を用いて表すと

$$p_{n+1} = \left( -\frac{\text{テ}}{\text{トナ}} \right) p_n + \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

となる。

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\text{ネ}}{\text{ノハ}}$  である。

(25 点)

右のページは白紙です。

2

$a$  を正の実数とする。 $xy$  平面上の点  $A(a, 1)$  と動点  $P(x, y)$  の距離は、点  $P$  と直線  $y = -1$  の距離に等しいという。点  $P$  の軌跡を  $C_1$  とし、放物線  $y = -4x^2 + ax + a$  を  $C_2$  とする。文中の  $\log$  は自然対数を表す。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  が共有点をただ 1 つもつのは  $a = \frac{\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$  のときである。このとき、

共有点における  $C_2$  の接線を  $l_1$ 、共有点を通り  $l_1$  に垂直な直線を  $l_2$  とすると、

$l_1$  と  $l_2$ 、および  $y$  軸によって囲まれる部分の面積は、 $\frac{\boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}$  である。

(2)  $y$  軸と  $C_1$  の共有点が、 $y$  軸と  $C_2$  の共有点と一致するのは、 $a = \boxed{\text{コ}}$  のとき

である。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  の共有点の  $x$  座標は  $\boxed{\text{サ}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}}$  であるから、

$C_1$  と  $C_2$  で囲まれる部分の面積は  $\frac{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}}$  である。

曲線  $y = \frac{7}{x+1}$  ( $x \neq -1$ ) を  $C_3$  とする。

(3)  $a = \boxed{\text{ク}}$  とする。このとき、 $C_1$  と  $C_3$  の交点の座標は  $(\boxed{\text{ニ}}, \boxed{\text{ヌ}})$  であり、

$C_1$  と  $C_3$ 、および  $y$  軸によって囲まれる部分を  $y$  軸の周りに 1 回転してできる

立体の体積は  $\pi \left( \boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}} - \boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}} \log \boxed{\text{フ}} \right)$  である。

(25 点)

右のページは白紙です。

3

関数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ ,  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  ( $-r \leq x \leq r, r > 0$ ) を考える。

放物線  $y = f(x)$  と曲線  $y = g(x)$  は、異なる 2 つの共有点で接するという。ただし、2 つの曲線が共有点 A で接するとは、2 つの曲線が点 A において共通の接線をもつことである。また、文中の  $\log$  は自然対数を表す。

(1)  $r = \sqrt{\text{ア}}$  であり、共有点の座標はそれぞれ  $(-\text{イ}, \text{ウ})$ ,  $(\text{エ}, \text{オ})$  である。

(2)  $xy$  平面上において、不等式

$$-g(x) \leq y \leq f(x), \quad -\sqrt{\text{ア}} \leq x \leq \sqrt{\text{ア}}$$

が表す領域を  $D$  とし、 $\alpha$  を

$$0 \leq \alpha \leq 2 \quad \dots\dots\dots (*)$$

を満たす定数とする。点  $(x, y)$  が領域  $D$  内を動くとき、 $\alpha x + y$  のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{\text{カ} \alpha^{\text{キ}} + \text{ク}} \leq \alpha x + y \leq \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \alpha^{\text{サ}} + \text{シ}$$

である。したがって、点  $(x, y)$  が領域  $D$  内を動き、 $\alpha$  が  $(*)$  の範囲を動くとき、 $\alpha x + y$  のとりうる値の最大値は  $\text{ス}$  であり、最小値は  $-\text{セ}$  である。

(3)  $\alpha \geq 0$  とする。直線  $y = -\alpha x + k$  と曲線  $y = g(x)$  が接するように  $k$  を定める。このとき、接点の座標を  $(u(\alpha), v(\alpha))$  とおくと、

$$u(\alpha) = \alpha \sqrt{\frac{\text{ソ}}{\alpha^{\text{タ}} + \text{チ}}}, \quad v(\alpha) = \sqrt{\frac{\text{ツ}}{\alpha^{\text{テ}} + \text{ト}}}$$

である。また、

$$\int_0^{\frac{5}{12}} u(\alpha) d\alpha = \frac{\text{ナ}}{\text{ニ} \text{ヌ}} \sqrt{\text{ネ}}, \quad \int_0^{\frac{5}{12}} v(\alpha) d\alpha = \sqrt{\text{ノ}} \log \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4

自然数  $m$  を自然数  $n$  で割ったときの余りを  $R[m:n]$  で表すとする。

- (1)  $31^2 - 1$  を 30 で割ったときの余り  $R[31^2 - 1 : 30]$  は ア である。また、  
 $31^3$  を 30 で割ったときの余り  $R[31^3 : 30]$  は イ である。
- (2)  $R[31^{13} : 29] =$  ウ エ であり、 $R[31^{13} : 33] =$  オ カ である。
- (3)  $R[31^{130} : 900] =$  キ ク ケ である。
- (4)  $R[31^{103} : 960] =$  コ サ である。
- (5)  $R[31^{31} : 27000] =$  シ ス セ ソ タ である。

(25 点)

右のページは白紙です。