

F 2

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 **1** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 自然数 n に対し、 $l(n)$ を n の正の約数の個数とし、 n の正の約数を小さい順に並べたときの j 番目の数を $a(n, j)$ とする ($j = 1, \dots, l(n)$)。また、数列 $b(1), b(2), \dots$ を

$$b(1) = 1, \quad b(n) = - \sum_{k=1}^{l(n)-1} b(a(n, k)) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める。例えば、 $n = 6$ の場合、 $l(6) = 4$ となり、

$$a(6, 1) = 1, \quad a(6, 2) = 2, \quad a(6, 3) = 3, \quad a(6, 4) = 6$$

となる。また、 $b(6) = -(b(1) + b(2) + b(3))$ である。

このとき、次の各問いに答えよ。

(50 点)

- (1) p を素数とするととき、 $b(p)$ を求めよ。
- (2) p, q を異なる 2 つの素数とするととき、 $b(pq)$ を求めよ。
- (3) p を素数、 k を 2 以上の自然数とするととき、 $b(p^k)$ を求めよ。
- (4) p, q, r を異なる 3 つの素数とするととき、 $b(pqr)$ を求めよ。
- (5) n を 2 以上の自然数とし、 $p_1, \dots, p_n$ を異なる n 個の素数からなる数列とするととき、 $\sum_{k=1}^n k \cdot b(p_k)^k$ を求めよ。
- (6) n を 3 以上の自然数とし、 $p_1, \dots, p_n$ を異なる n 個の素数からなる数列とするととき、

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(b(p_k) + k)(b(p_k p_{k+1}) + k)}$$

を求めよ。

- (7) p, q, r を異なる 3 つの素数とし、 $n = pqr$ とするととき、 $\sum_{k=1}^{l(n)} \frac{n \cdot b(a(n, k))}{a(n, k)}$ が $p-1$ の倍数であることを示せ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 $0 \leq s \leq 1$ を満たす実数 s に対し、座標平面上で曲線 C_s を次式によって定義する。

$$C_s : \begin{cases} x = t - s \cos t \\ y = \sin t + s \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

また、 C_s 上の点 $(t - s \cos t, \sin t + s)$ を $P_s(t)$ とする。 s が 0 から 1 まで動くときに C_s が通過する部分を D とする。

(50 点)

- (1) C_0 を図示せよ。
- (2) s が 0 から 1 まで動くとき、3 点 $P_s(0)$, $P_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P_s(\pi)$ の軌跡を図示せよ。
- (3) C_1 上の点 $P_1(t)$ における接線の傾きを t を用いて表せ。
- (4) D を図示し、 D の面積を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

Q 2

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより7ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内のアからセにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、 は 2 桁の数を、 は 3 桁の数を表すものとする。分数は既約分数として表すものとする。 (50 点)

$n \geq k$ を満たす自然数 n と k に対して、1 から n までの自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の k 個の要素からなる部分集合 S で、条件

$$(C) \quad x \in S \text{ ならば, } x+1 \in S \text{ または } x-1 \in S$$

を満たすようなものの個数を $c(n, k)$ で表す。ただし、条件を満たす部分集合が存在しない場合には、その個数は 0 であるとする。

(1) $n > 3$ のとき、 $c(n, 3) = \text{ア} n - \text{イ}$ である。

(2) $n > 4$ のとき、

$$c(n, n-1) = \text{ウ} n - \text{エ},$$
$$c(n, 4) = \frac{1}{\text{オ}} (n - \text{カ})(n - \text{キ})$$

である。ただし、 $\text{カ} \geq \text{キ}$ とする。

(3) $n > 6$ のとき、 $c(n, 5) = (n - \text{ク}) \text{ケ}$ である。

(4) 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ の空集合ではない部分集合の個数は であり、そのうち、条件 (C) を満たす部分集合の個数は である。

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 t は $0 \leq t \leq 2$ を満たす実数とする。座標平面上の $x \geq 0$ の範囲における、直線 $y = -t$ と円 $x^2 + (y+1)^2 = 1$ の交点を A とする。また、点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ の交点を B とし、線分 AB の中点を P とする。ただし、 A と B が一致するときはその点を P とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、(1), (2) については答のみを解答すればよい。 (50 点)

- (1) 点 P の x 座標, y 座標をそれぞれ t の式で表せ。
- (2) t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき、点 P の x 座標が動く範囲を求めよ。
- (3) t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき、点 P の y 座標が動く範囲を求めよ。
- (4) t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき点 P が描く軌跡を C とする。また、 C と y 軸で囲まれた部分を D とする。 D の面積を求めよ。
- (5) (4) で定めた D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

