

(1)

円 C_1, C_2 の中心を A, B , 半径を r, R とおく。 $y = x^2$ について $y' = 2x$ より, 点 $P(p, p^2)$ における接線方向ベクトルの一つは $(1, 2p)$ であるから, 点 $P(p, p^2)$ における法線方向ベクトルの一つは $(2p, -1)$ である。円 C_1 が x 軸に接することより, $A(a, r)$ とおけ, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, $AP = r$ より,

$$(a, r) = (p, p^2) + \frac{r}{\sqrt{(2p)^2 + (-1)^2}}(2p, -1)$$

が成り立つから,

$$r = p^2 - \frac{r}{\sqrt{4p^2 + 1}}$$

$$\therefore r = \frac{p^2 \sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{p^2 \sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 1}$$

(2)

円 C_2 が y 軸に接することより, $B(R, b)$ とおけ, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB}$, $BP = R$ より,

$$(R, b) = (p, p^2) + \frac{R}{\sqrt{(2p)^2 + (-1)^2}}(-2p, 1)$$

が成り立つから,

$$\begin{cases} R = p - \frac{2pR}{\sqrt{4p^2 + 1}} \\ b = p^2 + \frac{R}{\sqrt{4p^2 + 1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{p\sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 2p} \\ b = p^2 + \frac{R}{\sqrt{4p^2 + 1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{p\sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 2p} \\ b = p^2 + \frac{p}{\sqrt{4p^2 + 1} + 2p} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p^2 + \frac{p}{\sqrt{4p^2 + 1} + 2p}$$

(3)

円 C_1, C_2 の半径が等しいとき,

$$r = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 \sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 1} = \frac{p\sqrt{4p^2 + 1}}{\sqrt{4p^2 + 1} + 2p}$$

$$\Leftrightarrow p(\sqrt{4p^2 + 1} + 2p) = \sqrt{4p^2 + 1} + 1 \quad (\because p > 0, \sqrt{4p^2 + 1} > 0)$$

$$\Leftrightarrow (p-1)\sqrt{4p^2 + 1} = 1 - 2p^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $p \geq 1$ のとき, $(\textcircled{1} \text{の左辺}) \geq 0, (\textcircled{1} \text{の右辺}) < 0$ より $\textcircled{1}$ は成り立たない。 $0 < p < 1$ のとき, $(\textcircled{1} \text{の左辺}) < 0$ であるから, $(\textcircled{1} \text{の右辺}) < 0$ となり,

$$1 - 2p^2 < 0, 0 < p < 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 > \frac{1}{2}, 0 < p < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$$

である。このとき, $\textcircled{1}$ は成り立つ。 $\frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$ のとき, $\textcircled{1}$ の辺々を 2 乗して,

$$(p-1)^2 (\sqrt{4p^2 + 1})^2 = (1-2p^2)^2, \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$$

$$\Leftrightarrow p(8p^2 - 9p + 2) = 0, \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$$

$$\Leftrightarrow 8p^2 - 9p + 2 = 0, \frac{1}{\sqrt{2}} < p < 1$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{9 + \sqrt{17}}{16} \left(\because \frac{9 - \sqrt{17}}{16} < \frac{9 - 4}{16} = \frac{5}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{13}{16} = \frac{9 + 4}{16} < \frac{9 + \sqrt{17}}{16} < 1 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{9 + \sqrt{17}}{16}$$

(1)

数学的帰納法を利用して、

$$0 < a_n < \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

がすべての自然数 n で成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

与えられた条件 $0 < a_1 < \frac{1}{3}$ より、確かに $n=1$ で $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ において、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{4a_k^2}{3a_k^2+1} \\ &= \frac{\frac{4}{3}(3a_k^2+1) - \frac{4}{3}}{3a_k^2+1} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3a_k^2+1} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。帰納法の仮定より、 $0 < a_k < \frac{1}{3}$ だから

$$0 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 0 + 1} \right) < a_{k+1} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3a_k^2+1} \right) < \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 1} \right) = \frac{1}{3}$$

と分かる。これより、 $n=k+1$ でも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上, [1], [2] より、 $\textcircled{1}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

不等式の右辺から左辺を引いた式は、

$$\begin{aligned} \frac{4a_{n-1}}{3a_{n-1}^2+1} - \frac{4a_n}{3a_n^2+1} &= \frac{4a_{n-1}(3a_n^2+1) - 4a_n(3a_{n-1}^2+1)}{(3a_{n-1}^2+1)(3a_n^2+1)} \\ &= \frac{12a_{n-1}a_n^2 + 4a_{n-1} - 12a_na_{n-1}^2 - 4a_n}{(3a_{n-1}^2+1)(3a_n^2+1)} \\ &= \frac{12a_{n-1}a_n(a_n - a_{n-1}) + 4(a_{n-1} - a_n)}{(3a_{n-1}^2+1)(3a_n^2+1)} \\ &= \frac{4(a_{n-1} - a_n)(1 - 3a_na_{n-1})}{(3a_{n-1}^2+1)(3a_n^2+1)} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで

$$\begin{aligned} a_{n-1} - a_n &= a_{n-1} - \frac{4a_{n-1}^2}{3a_{n-1}^2+1} \\ &= \frac{3a_{n-1}^3 + a_{n-1} - 4a_{n-1}^2}{3a_{n-1}^2+1} \\ &= \frac{a_{n-1}(1 - a_{n-1})(1 - 3a_{n-1})}{3a_{n-1}^2+1} \end{aligned}$$

となるが、(1) および $0 < a_1 < \frac{1}{3}$ から、 $a_{n-1} - a_n > 0$ である。さらに、

$$1 - 3a_na_{n-1} > 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$$

であるから、 $\textcircled{2}$ は正であり、 $\frac{4a_n}{3a_n^2+1} < \frac{4a_{n-1}}{3a_{n-1}^2+1}$ が示された。

(証明終)

(3)

$b_k = \frac{4a_k}{3a_k^2+1}$ とおく。(2) より、数列 $\{b_k\}$ は単調減少数列である。したがって、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{4a_k^2}{3a_k^2+1} \\ &= b_k a_k \\ &< b_{k-1} a_k \\ &< b_{k-2} a_k \\ &\vdots \\ &< b_1 a_k \\ \therefore a_{k+1} &< \left(\frac{4a_1}{3a_1^2+1} \right) a_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ で添え字を $k=1, 2, \dots, n$ としたものを辺々かけて、

$$a_{n+1} < \left(\frac{4a_1}{3a_1^2+1} \right)^n a_1$$

となる。よって、示された。

(証明終)

(1)

$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-3\vec{b}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+3\vec{b}) \cdot (\vec{a}-3\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 9|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}| &= 3|\vec{b}|\end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}=\vec{0} \\ |\vec{c}|=1 \\ |\vec{a}+\vec{b}|=3|\vec{b}| \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \vec{c}=\vec{a}+3\vec{b} \\ |\vec{c}|^2=1 \\ |\vec{a}+\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |\vec{a}+3\vec{b}|^2=1 \\ |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \\ |\vec{c}|=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=1 \\ |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0 \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \\ |\vec{c}|=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 6\vec{a}\cdot\vec{b}+18|\vec{b}|^2=1 \\ 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0 \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \\ |\vec{c}|=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{30} \\ |\vec{b}|^2=\frac{1}{15} \\ |\vec{a}|=3|\vec{b}| \\ |\vec{c}|=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |\vec{a}|=\frac{3}{\sqrt{15}} \\ |\vec{b}|=\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{30} \\ |\vec{c}|=1 \end{cases}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\vec{a}|=\frac{\sqrt{15}}{5}, |\vec{b}|=\frac{\sqrt{15}}{15}, \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{30}$$

(2)

$|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2$ を整理すると、

$$\begin{aligned}|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2 &= t^2|\vec{a}|^2 + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)^2|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{15}t(1-t) + \frac{1}{15}(1-t)^2 \\ &= \frac{1}{15}(11t^2 - 3t + 1) \\ &= \frac{1}{15}\left\{11\left(t - \frac{3}{22}\right)^2 + \frac{35}{44}\right\}\end{aligned}$$

となるから、 $|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2$ は $t=\frac{3}{22}$ のとき、最小値 $\frac{7}{132}$ をとる。すなわち、 $|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|$ は

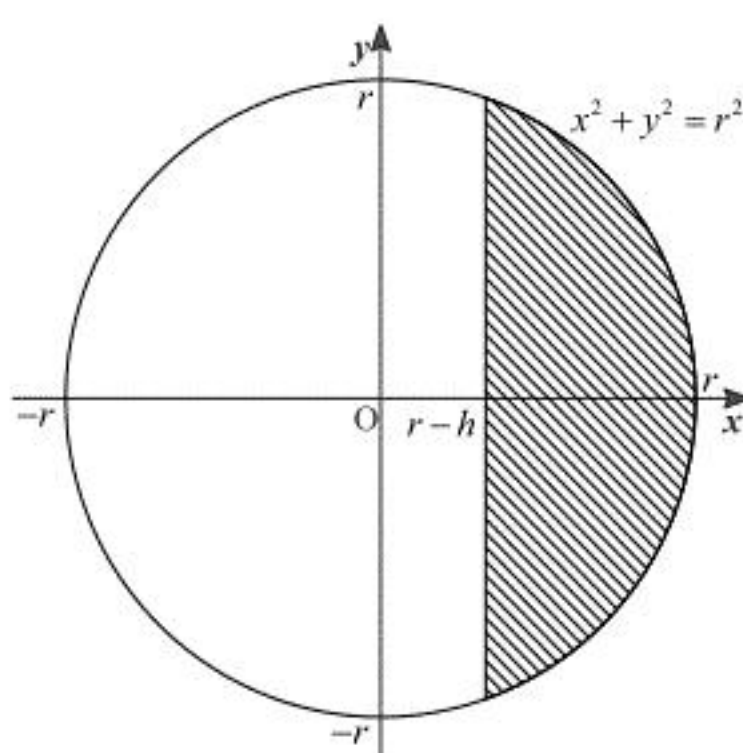
$$t=\frac{3}{22} \text{ のとき、最小値 } \sqrt{\frac{7}{132}} = \frac{\sqrt{231}}{66}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad t=\frac{3}{22} \text{ のとき、最小値 } \frac{\sqrt{231}}{66}$$

(1)

水面が床面から h の高さにあるとき、水槽内の水の体積は次図の斜線部を x 軸回りに回転させて得られる立体の体積に等しい。



したがって、求めるべき V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{r-h}^r \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{r-h}^r \\ &= \frac{\pi}{3} (3rh^2 - h^3) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{3} (3rh^2 - h^3)$$

(2)

$$\frac{dV}{dt} = a, \quad \frac{dV}{dh} = \pi(2rh - h^2)$$

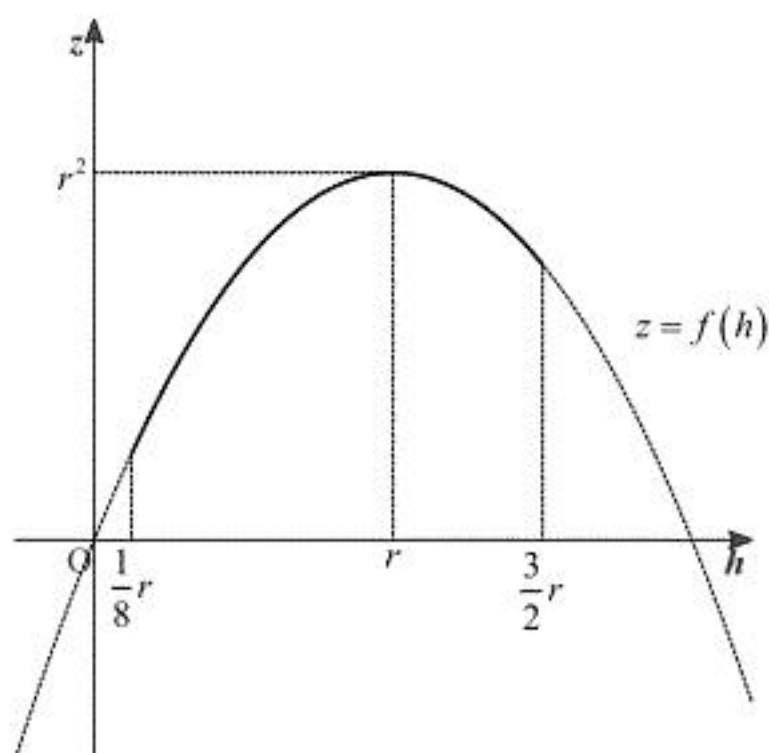
である。求めるのは $\frac{dh}{dt}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dh}{dV} \\ &= \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dV}{dh}} \\ &= a \cdot \frac{1}{\pi(2rh - h^2)} \\ &= \frac{a}{\pi(2rh - h^2)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{\pi(2rh - h^2)}$$

(3)



$\frac{1}{8}r \leq h \leq \frac{3}{2}r$ において、 $f(h) = 2rh - h^2$ の最大値を求める。 $f(h) = -(h-r)^2 + r^2$ より、上図の

ように $f(h)$ は $h=r$ のとき、最大値 $f(r) = r^2$ をとる。したがって、求める $\frac{dh}{dt}$ の最小値は、

$$\frac{a}{\pi f(r)} = \frac{a}{\pi r^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{\pi r^2}$$