

【解答】

(1)	ア	イ				
	7	8				
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	4	7	3	7	6	7
(3)	ケ	コ				
	1	2				

【解説】

(1)

余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

と求められる。

(2)

(1)を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos\theta \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta \\ &= \cos\theta \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos\angle AOC \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \cos\angle BOC \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る。また、点Pは平面ABC上にあるため、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\overrightarrow{OC}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1-s-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow s + \frac{7}{8}t + \frac{1}{2}(1-s-t) &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow 8s + 7t + 4(1-s-t) &= 5 \\ \Leftrightarrow 4s + 3t &= 1 \quad \quad \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 + (1-s-t)\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{8}s + t + \frac{1}{2} \cdot (1-s-t) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 7s + 8t + 4(1-s-t) &= 4 \\ \Leftrightarrow 3s + 4t &= 0 \quad \quad \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と求められる。①, ②より、

$$s = \frac{4}{7}, t = -\frac{3}{7}$$

を得、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{OC}$$

となる。

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO} &= -\frac{4}{7}\overrightarrow{AO} - \frac{3}{7}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + \frac{6}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= -\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

を得る。Qは直線AP上の点であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= k\overrightarrow{AP} \\ &= -\frac{3}{7}k\overrightarrow{AB} + \frac{6}{7}k\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

と表せる。また、Qは直線BC上の点であるから

$$\begin{aligned}-\frac{3}{7}k + \frac{6}{7}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

と表せる。これは、点Qが線分BCを2:1に外分する点であることを表している。ゆえに

$$\frac{CQ}{BQ} = \frac{1}{2}$$

である。

【解答】

(1)	サ	シ	ス		
	1	1	2		
(2)	セ	ソ			
	1	6			
(3)	タ	チ	ツ		
	1	2	3		
(4)	テ				
	7				
(5)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	1	2	5	2	1

【解説】

(1)

a_1, a_2 の目の出方の総数は $6^2 = 36$ (通り)であり, これらは同様に確からしい。 $a_1 \times a_2$ が2以下であるような (a_1, a_2) の組み合わせは

$$(a_1, a_2) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

の3通りであるから, 求める確率は

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

である。

(2)

a_i はサイコロの目であるから, $a_i > 0$ である。よって, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$a_1 \times a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2$$

であり, 等号は $a_1 = a_2$ のとき成立する。よって, $a_1 \times a_2 \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2$ となる確率は等号が成立する確率に等しいから, 求める確率は $a_1 = a_2$ となる確率であり, これは a_1 に対し a_2 が6通りのうち a_1 と同じものであればよいため, 求める確率は $\frac{1}{6}$ である。

(3)

$x \geq 3$ となる確率は, すべての a_i が3, 4, 5, 6のいずれかであればよいから,

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n$$

である。求める確率は, これの余事象を考えて,

$$1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

と得られる。

(4)

$y \leq 4$ となる確率 p_n は, すべての a_i が1, 2, 3, 4のいずれかである確率を求めて,

$$p_n = \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

である。よって,

$$p_n \geq \frac{10^5}{9^n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^n \geq \frac{10^5}{9^n}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \cdot 3^n \geq 10^5$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2^n \cdot 3^n \geq 5$$

$$\Leftrightarrow n(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow n(0.301 + 0.477) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{5}{0.778} = 6.42 \dots$$

から, 最小の n は $n = 7$ と求まる。

(5)

$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \leq 4$ であるとき, $a_1, a_2, \dots, a_n$ の最大値は4以下である。以下, 最大値によって場合分けする。

[1] 最大値が3または4のとき

$a_1, a_2, \dots, a_n$ のうち1つだけが3または4で, 残りの目はすべて1である。いつ3または4が出るかが $2 \cdot n$ 通り, 残りの目の出方は1通りであるから, このような場合の数は

$$2n \text{ 通り}$$

である。

[2] 最大値が2のとき

2が2回出るとき, 残りは1が出る。いつ2が出るかを考えて, このような場合の数は

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ (通り)}$$

である。次に, 2が1回のみ出る場合他は1のみであるから, いつ2が出るかを考えて n 通りである。よって, 最大値が2となる場合の数は

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

通りである。

[3] 最大値が1のとき

1のみが出るため, 1通りである。

以上[1], [2], [3]より, 求める目の出方の総数は,

$$2n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

通りである。