

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	2	4	1	2	1	2	2	3	2	1
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
	3	3	6	1	2	7	2	2		
(2)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ				
	1	1	2	1	1	2				
(3)	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ
	1	3	6	5	9	5	1	2	8	2
	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	
	7	3	7	2	1	6	1	1	8	

【解説】

(1)

$x = \sin \theta + \cos \theta$ について三角関数の合成を用いると、
$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

と変形できる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ であり、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

であるから、 $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ である。ここで、

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= \sin^3 \theta + \cos^3 \theta - 2 \sin 2\theta \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= x \left(1 - \frac{x^2 - 1}{2} \right) - 4 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2} x + 2 \end{aligned}$$

となる。両辺 x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{3}{2} x^2 - 4x + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (3x^2 + 8x - 3) \\ &= -\frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 3) \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下になる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$x = -1$ のとき、

$$y = \frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{2} + 2 = -1$$

であり、 $x = \sqrt{2}$ のとき、

$$y = -\sqrt{2} - 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。また、 $x = \frac{1}{3}$ のとき

$$y = -\frac{1}{54} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{61}{27}$$

である。ここで、

$$-1 - \left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} > 0$$

であるから、 $-1 > -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。したがって、最大値は $\frac{61}{27}$ 、最小値は $-2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ である。

(2)

2^{36} について常用対数をとると、
$$\log_{10} 2^{36} = 36 \log_{10} 2 = 36 \cdot 0.3010 = 10.8360$$

である。したがって、

$$10 < 10.8360 < 11 \Leftrightarrow 10^{10} < 2^{36} < 10^{11}$$

が成り立つから、 2^{36} は11桁の整数である。また、 3^n が11桁の整数となるとき、

$$10^{10} \leq 3^n < 10^{11}$$

である。各辺常用対数をとると

$$\begin{aligned} 10 &\leq n \cdot \log_{10} 3 < 11 \\ \Leftrightarrow 10 &\leq n \cdot 0.4771 < 11 \\ \Leftrightarrow \frac{10}{0.4771} &\leq n < \frac{11}{0.4771} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{10}{0.4771} = 20.9\cdots, \frac{11}{0.4771} = 23.0\cdots$ であるから、これを満たす最小の自然数 n は $n = 21$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \log_{10} (6 \times 3^{21}) &= \log_{10} 2 + 22 \log_{10} 3 \\ &= 0.3010 + 22 \cdot 0.4771 \\ &= 10.7972 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \log_{10} (5 \times 10^{10}) &= \log_{10} \frac{10^{11}}{2} \\ &= \log_{10} 10^{11} - \log_{10} 2 \\ &= 11 - 0.3010 \\ &= 10.6990 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 10.6990 &< 10.8360 < 11 \Leftrightarrow 5 \times 10^{10} < 2^{36} < 10^{11} \\ 10.6990 &< 10.7972 < 11 \Leftrightarrow 5 \times 10^{10} < 6 \times 3^{21} < 10^{11} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$10^{11} < 2^{36} + 6 \times 3^{21} < 2 \times 10^{11} < 10^{12}$$

であるから、 $2^{36} + 6 \times 3^{21}$ は12桁の整数である。

(3)(a)

3つのさいころの目の出方の総数は、

$$6^3 = 216 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。出る目がすべて同じになるとき目の出方は6通りあるから、確率は、

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

である。また、出る目がすべて異なる確率は、

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{5}{9}$$

である。これら2つの場合のいずれでもないとき、出る目のうちちょうど2つが一致し、他は異なる目であるから、確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{5}{9} \right) = \frac{5}{12}$$

である。

(b)

出る目の最小値が3以上となるとき、3から6の4つの目を取り得るから、確率は、

$$\left(\frac{4}{6} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。同様に最小値が4以上になるときは、4から6の3つの目を取り得るから、確率は、

$$\left(\frac{3}{6} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。最小値が3となるのは、最小値が3以上となる場合から最小値が4以上となる場合を除いた場合であるから、確率は、

$$\frac{8}{27} - \frac{1}{8} = \frac{37}{216}$$

である。最小値が3で最大値が5となるときの出る目の組み合わせは、

$$(3, 3, 5), (3, 4, 5), (3, 5, 5)$$

である。 $(3, 3, 5), (3, 5, 5)$ となる目の出方はそれぞれ

$${}_3C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

であり、 $(3, 4, 5)$ となる目の出方は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

である。したがって、最小値が3で最大値が5となる確率は、

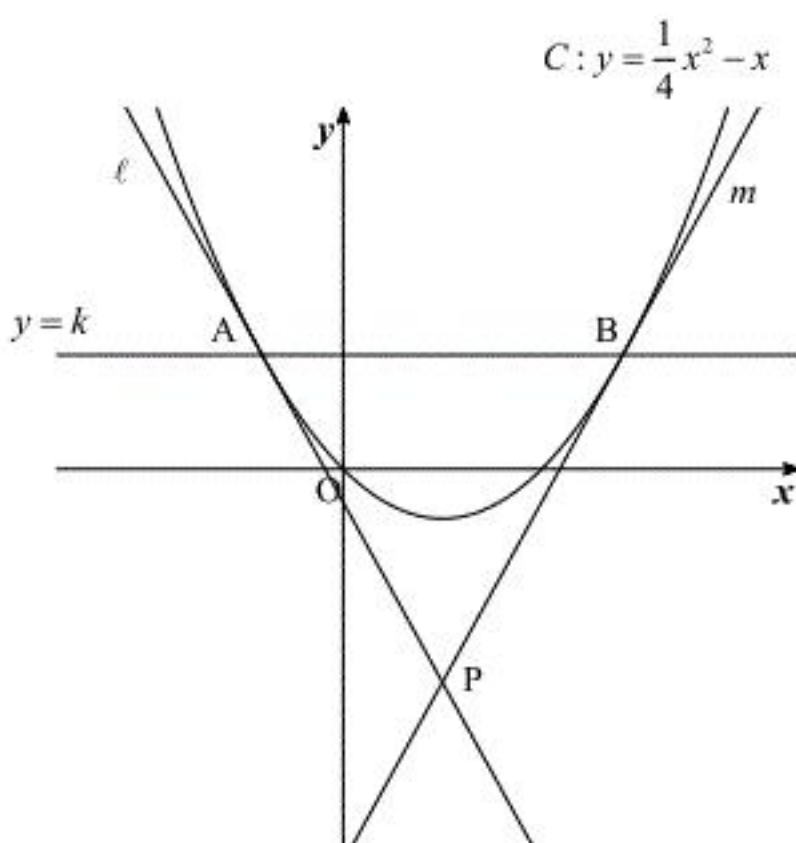
$$\frac{3 \cdot 2 + 6}{216} = \frac{1}{18}$$

である。

2

(1)

放物線 C と直線 ℓ, m を図示すると以下のようになる。



放物線の式と直線 $y = k$ を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^2 - x &= k \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4k &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-4k)} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm 2\sqrt{k+1}\end{aligned}$$

となるから、点 A の x 座標は $x = 2 - 2\sqrt{k+1}$ 、点 B の x 座標は $x = 2 + 2\sqrt{k+1}$ とわかる。ここで、

放物線の式を両辺 x で微分すると $y' = \frac{1}{2}x - 1$ となるから、直線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}y - k &= \left\{ \frac{1}{2}(2 - 2\sqrt{k+1}) - 1 \right\} \left\{ x - (2 - 2\sqrt{k+1}) \right\} \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt{k+1} \left\{ x - (2 - 2\sqrt{k+1}) \right\} + k \\ \therefore y &= -\sqrt{k+1}x + 2\sqrt{k+1} - k - 2\end{aligned}$$

であり、直線 m の方程式は

$$\begin{aligned}y - k &= \left\{ \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{k+1}) - 1 \right\} \left\{ x - (2 + 2\sqrt{k+1}) \right\} \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{k+1} \left\{ x - (2 + 2\sqrt{k+1}) \right\} + k \\ \therefore y &= \sqrt{k+1}x - 2\sqrt{k+1} - k - 2\end{aligned}$$

である。直線 ℓ, m の式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}-\sqrt{k+1}x + 2\sqrt{k+1} - k - 2 &= \sqrt{k+1}x - 2\sqrt{k+1} - k - 2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{k+1}x &= 4\sqrt{k+1} \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

であり、これを直線 ℓ の式に代入すると、

$$y = -\sqrt{k+1} \cdot 2 + 2\sqrt{k+1} - k - 2 = -k - 2$$

となるから、点 P の座標は $(2, -k-2)$ である。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad \text{直線 } \ell: \quad &y = -\sqrt{k+1}x + 2\sqrt{k+1} - k - 2 \\ \text{直線 } m: \quad &y = \sqrt{k+1}x - 2\sqrt{k+1} - k - 2 \\ \text{点 P:} \quad &(2, -k-2)\end{aligned}$$

(2)

線分 AB の中点を M とすると、M の座標は、

$$\left(\frac{(2 - 2\sqrt{k+1}) + (2 + 2\sqrt{k+1})}{2}, k \right) = (2, k)$$

であるから、P は k の値にかかわらず線分 AB の垂直二等分線上に存在する。よって、 $\triangle ABP$ は $PA = PB$ の二等辺三角形である。ここで、

$$PM = k - (-k-2) = 2k+2$$

であるから、

$$\begin{aligned}PA &= \sqrt{AM^2 + PM^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{k+1})^2 + (2k+2)^2} \\ &= 2\sqrt{k^2 + 3k + 2} \\ &= 2\sqrt{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle ABP$ が正三角形になるとき、 $k > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}PA &= AB \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(k+1)(k+2)} &= 4\sqrt{k+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{k+2} &= 2 \quad (\because k+1 \neq 0) \\ \therefore k &= 2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = 2$$

(3)

$\angle PAB = 75^\circ$ のとき、

$$\angle APB = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$$

である。したがって、 $\triangle ABP$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}AB^2 &= PA^2 + PB^2 - 2 \cdot PA \cdot PB \cdot \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow AB^2 &= 2 \cdot PA^2 - 2 \cdot PA^2 \cdot \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{k+1})^2 &= 2 \cdot 4(k+1)(k+2) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 16(k+1) &= 4(k+1)(k+2)(2 - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow k+2 &= \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \quad (\because k+1 \neq 0) \\ \therefore k &= 6 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = 6 + 4\sqrt{3}$$

(4)

$\triangle ABP$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PM \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{k+1} \cdot (2k+2) \\ &= 4(k+1)\sqrt{k+1}\end{aligned}$$

である。ここで、 S は $\triangle ABP$ の内接円の半径 r を用いて、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (PA + PB + AB) \\ &= \frac{r}{2} (2 \cdot 2\sqrt{(k+1)(k+2)} + 4\sqrt{k+1}) \\ &= 2r\sqrt{k+1}(\sqrt{k+2} + 1)\end{aligned}$$

と表すこともできる。したがって、

$$\begin{aligned}2r\sqrt{k+1}(\sqrt{k+2} + 1) &= 4(k+1)\sqrt{k+1} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2(k+1)}{\sqrt{k+2} + 1} \quad (\because \sqrt{k+1} \neq 0) \\ \Leftrightarrow r &= 2(\sqrt{k+2} - 1)\end{aligned}$$

である。 $r \geq 2k$ となると、

$$\begin{aligned}2(\sqrt{k+2} - 1) &\geq 2k \\ \Leftrightarrow \sqrt{k+2} &\geq k+1\end{aligned}$$

である。両辺正であるから 2 乗して、

$$\begin{aligned}k+2 &\geq k^2 + 2k + 1 \\ \Leftrightarrow k^2 + k - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} &\leq k \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となる。これと $k > 0$ より、 k の値の範囲は $0 < k \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ であるから、求める k の最大値は

$$k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

3

(1)

$t = \tan \theta$ とおくと、 $dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ であり、積分区間は以下のようになる。

t	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

より $f(x)$ は単調増加であり、 $f(0) = 0$ であるから、 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成り立つ。よって、 $x > 0$ において、

$$f(x)x^m > 0$$

であるから、

$$\int_a^1 f(x)x^m dx < \int_0^1 f(x)x^m dx$$

が成り立つ。また、 $a < x \leq 1$ において $f(a) < f(x)$ であるから、

$$\int_a^1 f(x)x^m dx > \int_a^1 f(a)x^m dx = f(a) \int_a^1 x^m dx$$

であり、 $0 \leq x < 1$ において $f(x) < f(1)$ であるから、

$$\int_0^1 f(x)x^m dx < \int_0^1 f(1)x^m dx = f(1) \int_0^1 x^m dx$$

が成り立つ。これより、与えられた不等式が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m = \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \right\}^{\sqrt{m}}$$

である。 $\sqrt{m} > 1$ のとき、与えられた不等式を用いて、

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m = \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \right\}^{\sqrt{m}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{m}}$$

となる。また、 $\sqrt{m} > 1$ のもと、

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m > 0$$

である。よって、 $\sqrt{m} > 1$ のとき、

$$0 < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{m}}$$

となる。 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{m}} = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m = 0$$

(4)

$m \rightarrow \infty$ とするとき、 $0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{m}} < 1$ である。よって、(2)の不等式において $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{m}}$ とするこ

とで、

$$f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 x^m dx < \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 f(x)x^m dx < f(1) \int_0^1 x^m dx$$

という不等式が得られ、各辺に m をかけると、

$$mf\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 x^m dx < m \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 f(x)x^m dx < mf(1) \int_0^1 x^m dx$$

となる。左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} mf\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 x^m dx &= mf\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} \right]_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{m}} \cdot f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mf\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 x^m dx = 1 \cdot f(1) \cdot (1-0) = f(1) = \frac{\pi}{4}$$

である。また、右辺を計算すると

$$\begin{aligned} mf(1) \int_0^1 x^m dx &= m \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{m}} \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mf(1) \int_0^1 x^m dx = \frac{\pi}{4}$$

である。したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 f(x)x^m dx = \frac{\pi}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} m \int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 f(x)x^m dx = \frac{\pi}{4}$$