

〔解答〕

(1)	ア	イ					
	9	7					
(2)	ウ	エ	オ	カ			
	5	6	2	5			
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	3	2	4	3	3	2	7

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{7} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{7} \cos \frac{\pi}{3} + 1 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} + 1 \\
 &= \frac{9}{7}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 g(\log_3 5) &= 3^{-\frac{7}{2} \log_3 5} \\
 &= \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{7}{2}} \\
 &= 5^{-\frac{7}{2}} \\
 &= \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^4} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{625}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

三角関数の合成を行うと

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{3}}{7} \sin x + \frac{1}{7} \cos x + 1 \\
 &= \frac{2}{7} \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1
 \end{aligned}$$

である。 x が実数全体を動くとき、 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ は $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ の範囲を動くから、

$f(x)$ のとりうる値の範囲は、

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{7} \cdot (-1) + 1 &\leq f(x) \leq \frac{2}{7} \cdot 1 + 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{7} &\leq f(x) \leq \frac{9}{7}
 \end{aligned}$$

である。このことと $g(x)$ が単調減少な連続関数であることから、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ のとり

うる値の範囲は、

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{9}{7}\right) &\leq (g \circ f)(x) \leq g\left(\frac{5}{7}\right) \\
 \Leftrightarrow 3^{-\frac{9}{2}} &\leq (g \circ f)(x) \leq 3^{-\frac{5}{2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{243} &\leq (g \circ f)(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{27}
 \end{aligned}$$

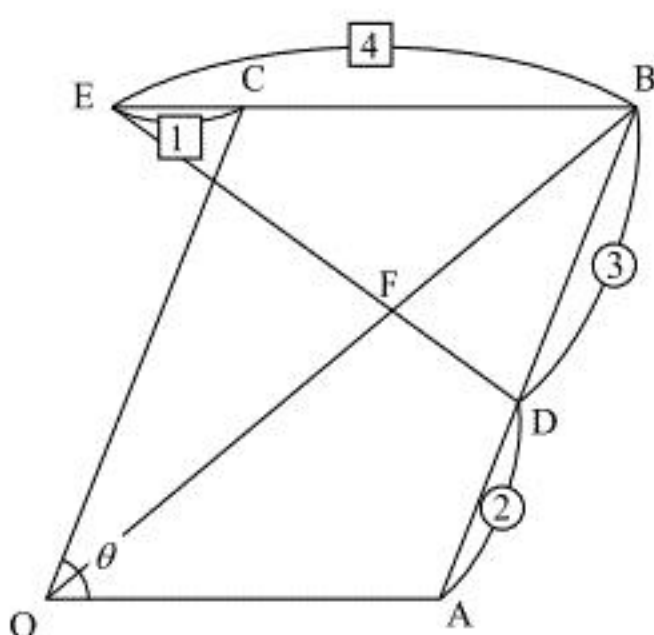
となる。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ				
	4	3	3	5				
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	7	2	9	1	7	2	9
(3)	ス	セ	ソ	タ				
	4	1	1	3				

〔解説〕

- (1) 各図形を図示すると以下のようになる。



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) - \left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= -\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。

(2)

四角形 OABC は平行四辺形であるから、

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

である。点 F は線分 OB 上の点であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= k\overrightarrow{OB} \\ &= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表すことができる。一方、点 F は線分 DE 上の点であるから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= (1-t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} \\ &= (1-t)\left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\right) + t\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) \\ &= \left(1 - \frac{4}{3}t\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表すことができる。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ が一次独立であることと①, ②より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 1 - \frac{4}{3}t = k \\ \frac{2}{5} + \frac{3}{5}t = k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{4}{3}t = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}t \\ k = 1 - \frac{4}{3}t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{29} \\ k = \frac{17}{29} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OF} = \frac{17}{29}\overrightarrow{OA} + \frac{17}{29}\overrightarrow{OC}$$

となる。

(3)

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OC}| = 2$ であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos \theta \\ &= 2\sqrt{3} \cos \theta \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

である。よって、線分 DE と線分 OB が直交するための条件は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC}\right) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{11}{15}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{3}{5}|\overrightarrow{OC}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}^2 - \frac{11}{15} \cdot 2\sqrt{3} \cos \theta + \frac{3}{5} \cdot 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{8}{5} - \frac{22\sqrt{3}}{15} \cos \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{4}{11}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	1	2	8	0			
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	4	3	5	3	6	7	6
(3)	シ	ス	セ	ソ			
	1	1	0	5			

【解説】

(1)

$$a_1 = \int_1^e \frac{(\log x)^3}{x} (1 - \log x)^4 dx$$

である。ここで、 $t = \log x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ であり、積分範囲の対応は以下のようになる。

x	1	→	e
t	0	→	1

よって、

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 t^3 (1-t)^4 dt \\ &= \int_0^1 (t^7 - 4t^6 + 6t^5 - 4t^4 + t^3) dt \\ &= \left[\frac{1}{8}t^8 - \frac{4}{7}t^7 + t^6 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{280} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)と同様に、 $t = \log x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ であり、積分範囲の対応は以下のようになる。

x	1	→	e^n
t	0	→	n

よって、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^4} \int_1^{e^n} \frac{(\log x)^3}{x} \left(1 - \frac{\log x}{n}\right)^{n+3} dx \\ &= \frac{1}{n^4} \int_0^n t^3 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+3} dt \end{aligned}$$

と変形できる。さらに、 $s = 1 - \frac{t}{n}$ とおくと、 $\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{n}$ であり、積分範囲の対応は以下のようになる。

t	0	→	n
s	1	→	0

よって、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^4} \int_0^n t^3 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+3} dt \\ &= \frac{1}{n^4} \int_1^0 n^3 (1-s)^3 \cdot s^{n+3} \cdot (-n) ds \\ &= \int_0^1 (1-s)^3 \cdot s^{n+3} ds \\ &= \int_0^1 (s^{n+3} - 3s^{n+4} + 3s^{n+5} - s^{n+6}) ds \\ &= \left[\frac{1}{n+4} s^{n+4} - \frac{3}{n+5} s^{n+5} + \frac{3}{n+6} s^{n+6} - \frac{1}{n+7} s^{n+7} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+4} - \frac{3}{n+5} + \frac{3}{n+6} - \frac{1}{n+7} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+4} - \frac{3}{n+5} + \frac{3}{n+6} - \frac{1}{n+7} &= \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+7} \right) - \left(\frac{3}{n+5} - \frac{3}{n+6} \right) \\ &= \frac{3}{(n+4)(n+7)} - \frac{3}{(n+5)(n+6)} \\ &= \frac{3(n+5)(n+6) - 3(n+4)(n+7)}{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)} \\ &= \frac{6}{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)} \end{aligned}$$

である。

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+4} - \frac{3}{k+5} + \frac{3}{k+6} - \frac{1}{k+7} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+7} \right) - 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+5} - \frac{1}{k+6} \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+7} \right) - 3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n+6} \right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - 3 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{105} \end{aligned}$$

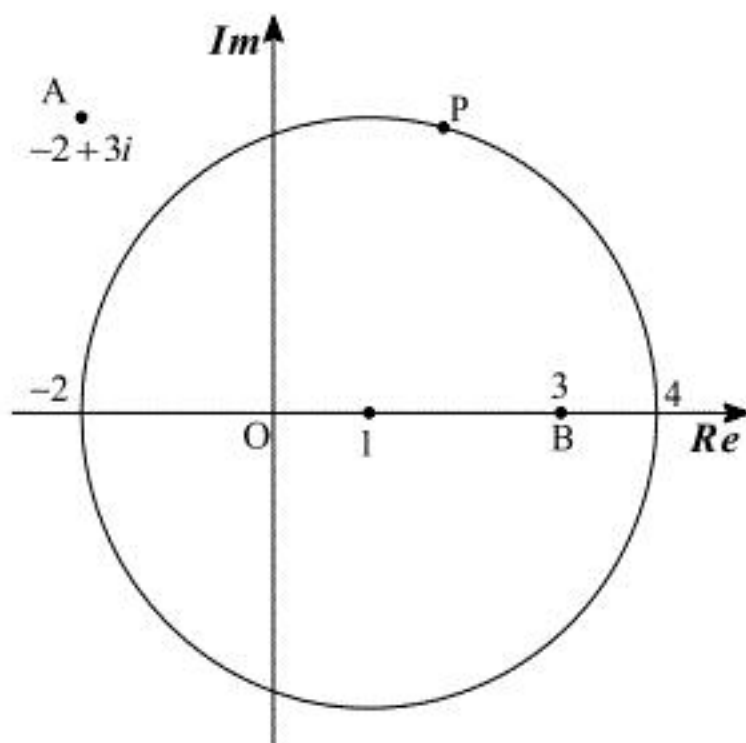
となる。

【解答】

(1)	ア	イ								
	3	4								
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	6	1	7	1	5	3	4	3	0
	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
	1	5	1	7	9	3	4	3	0	
(3)	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	3	3	2	3	4	1	9	3	4	3
	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ			
	4	1	5	3	4	3	4			

【解説】

(1) 3点 A, B, P を図示すると以下のようになる。



$$\begin{aligned} AB &= |3 - (-2+3i)| \\ &= |5+3i| \\ &= \sqrt{5^2+3^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

となる。

(2) 3点 $A(-2+3i)$, $B(3)$, $P(z)$ が一直線上にあるとき、実数 k を用いて、
 $z-3=k(-2+3i-3)$
 $\Leftrightarrow z=(3-5k)+3ki \quad \dots \textcircled{1}$

とかける。これが $|z-1|=3$ をみtusから、

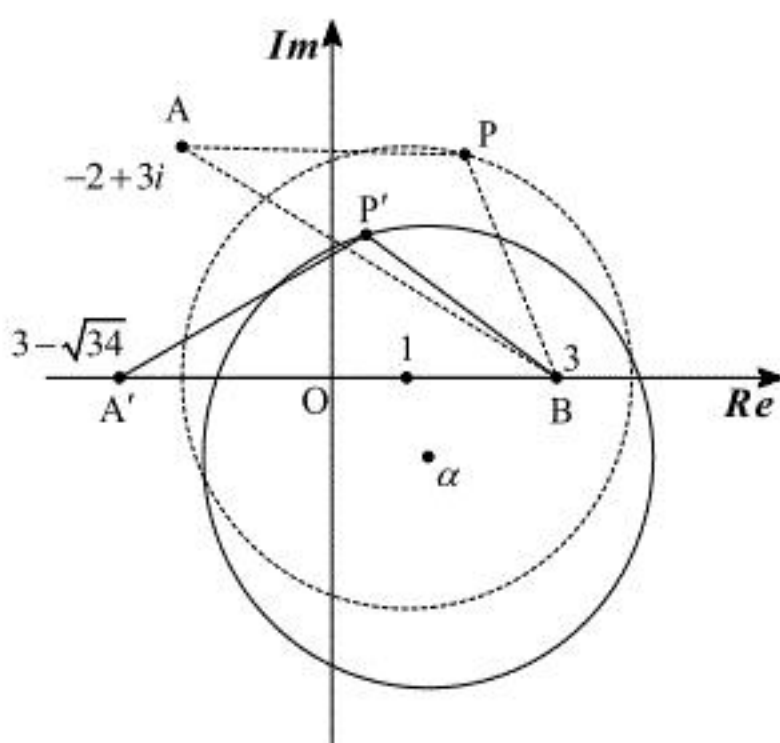
$$\begin{aligned} |(3-5k)+3ki-1| &= 3 \\ \Leftrightarrow (2-5k)^2+(3k)^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow 34k^2-20k-5 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{10 \pm 3\sqrt{30}}{34} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、求める z は、

$$\begin{aligned} z &= \left(3 - \frac{50 \pm 15\sqrt{30}}{34}\right) + \frac{30 \pm 9\sqrt{30}}{34}i \\ &= \frac{26}{17} \mp \frac{15}{34}\sqrt{30} + \left(\frac{15}{17} \pm \frac{9}{34}\sqrt{30}\right)i \end{aligned}$$

である(複号同順)。

(3) 点 B を中心に図形全体を $\angle OBA$ だけ反時計回りに回転すると以下のようになる。



$\theta = \angle OBA$ とおくと、回転によって、複素数 w の表す点は
 $w'-3=(\cos\theta+i\sin\theta)(w-3) \quad \dots \textcircled{2}$

をみtus複素数 w' の表す点にうつる。点 A, P が回転した先の点を A', P' とする。点 A' の表す複素数は(1)より $3-AB=3-\sqrt{34}$ である。よって、②より、

$$\begin{aligned} (3-\sqrt{34})-3 &= (\cos\theta+i\sin\theta)(-2+3i-3) \\ \therefore \cos\theta+i\sin\theta &= \frac{-\sqrt{34}}{-5+3i} = \frac{-\sqrt{34}(-5-3i)}{(-5+3i)(-5-3i)} = \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{3}{\sqrt{34}}i \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。②、③より、点 (1) がうつる点を (α) とすると、

$$\begin{aligned} \alpha-3 &= (\cos\theta+i\sin\theta)(1-3) \\ \Leftrightarrow \alpha &= \left(3-\frac{10}{\sqrt{34}}\right) - \frac{6}{\sqrt{34}}i \end{aligned}$$

である。すなわち、円 $|z-1|=3$ は円

$$\left|z - \left\{\left(3-\frac{10}{\sqrt{34}}\right) - \frac{6}{\sqrt{34}}i\right\}\right| = 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

にうつる。 $\triangle ABP$ の面積は $\triangle A'BP'$ の面積に一致するから、点 P' が円④を動くときの $\triangle A'BP'$ の面積の最大値を求めればよい。 $A'B$ は一定であるから、 $\triangle A'BP'$ の面積が最大となるのは、 $A'B$ を底辺としたときの高さ、すなわち点 P' の虚部の絶対値が最大となるときである。図より、このとき、点 P' が表す複素数を z' とすると、

$$\begin{aligned} z' &= \left(3-\frac{10}{\sqrt{34}}\right) - \frac{6}{\sqrt{34}}i - 3i \\ &= \left(3-\frac{10}{\sqrt{34}}\right) - \left(3+\frac{6}{\sqrt{34}}\right)i \end{aligned}$$

である。したがって、面積の最大値は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A'B \cdot |\text{Im}z'| &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \left(3+\frac{6}{\sqrt{34}}\right) \\ &= 3+\frac{3}{2}\sqrt{34} \end{aligned}$$

である。また、回転して z' にうつる z の値は、②、③より

$$\begin{aligned} z'-3 &= (\cos\theta+i\sin\theta)(z-3) \\ \Leftrightarrow \left(3-\frac{10}{\sqrt{34}}\right) - \left(3+\frac{6}{\sqrt{34}}\right)i - 3 &= \left(\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{3}{\sqrt{34}}i\right)(z-3) \\ \Leftrightarrow z &= \left\{-\frac{10}{\sqrt{34}} - \left(3+\frac{6}{\sqrt{34}}\right)i\right\} \left(\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}}i\right) + 3 \\ \therefore z &= 1 - \frac{9}{34}\sqrt{34} - \frac{15}{34}\sqrt{34}i \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABP$ の面積が最大となるときの z の値は $1-\frac{9}{34}\sqrt{34}-\frac{15}{34}\sqrt{34}i$ である。

5

(1)

常に $x^2 - 4x + 29 = (x - 2)^2 + 25 > 0$ であることに注意する。 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+3)' \cdot (x^2 - 4x + 29) - (x+3) \cdot (x^2 - 4x + 29)'}{(x^2 - 4x + 29)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2 - 4x + 29) - (x+3) \cdot (2x-4)}{(x^2 - 4x + 29)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 6x + 41}{(x^2 - 4x + 29)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{-x^2 - 6x + 41}{(x^2 - 4x + 29)^2}$$

(2)

(1)より、

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 4x + 29)^2} \left\{ x - (-3 - 5\sqrt{2}) \right\} \left\{ x - (-3 + 5\sqrt{2}) \right\}$$

である。 $(x^2 - 4x + 29)^2 > 0$ より、 $y = f(x)$ の実数全体での増減表は以下の通りである。

x	...	$-3 - 5\sqrt{2}$	...	$-3 + 5\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

ここで、

$$\begin{aligned} \sqrt{49} &< \sqrt{50} < \sqrt{64} \\ \Leftrightarrow 7 &< 5\sqrt{2} < 8 \end{aligned}$$

より $-3 - 5\sqrt{2} < -10 < -3 + 5\sqrt{2} < 20$ であるから、 $y = f(x)$ の $-10 \leq x \leq 20$ での増減表は以下の通りである。

x	-10	...	$-3 + 5\sqrt{2}$	...	20
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(-10) &= -\frac{7}{169} \\ f(-3 + 5\sqrt{2}) &= \frac{1 + \sqrt{2}}{10} \\ f(20) &= \frac{23}{349} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は $-10 \leq x \leq 20$ において $x = -3 + 5\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1 + \sqrt{2}}{10}$ をとり、 $x = -10$ で最小値 $-\frac{7}{169}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad x = -3 + 5\sqrt{2} \text{ で最大値 } \frac{1 + \sqrt{2}}{10}, \quad x = -10 \text{ で最小値 } -\frac{7}{169}$$

(3)

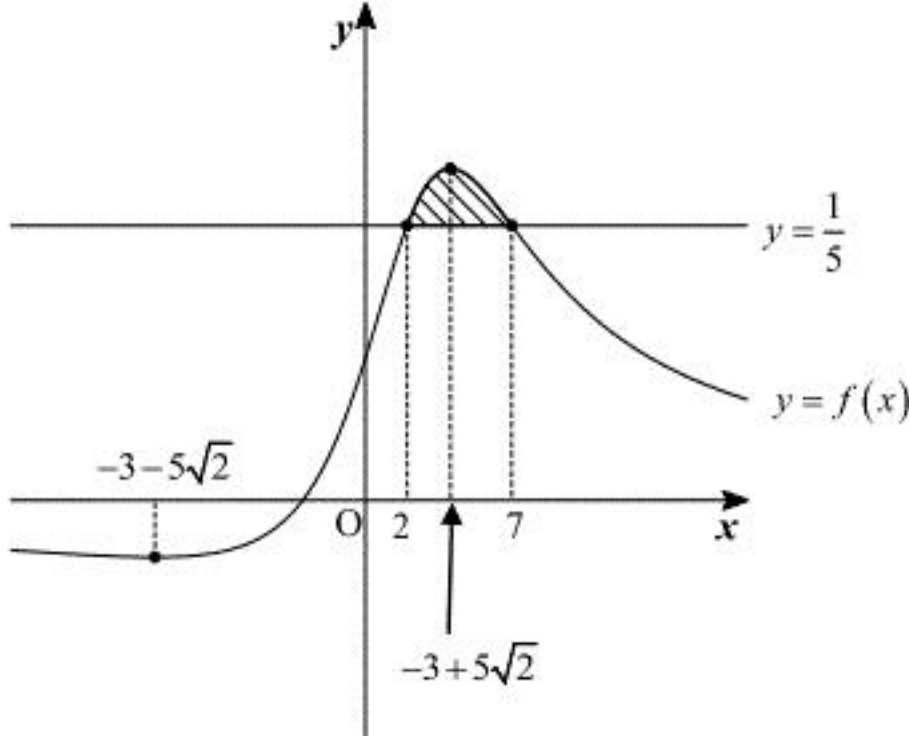
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2 - 4x + 29} &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow 5(x+3) &= x^2 - 4x + 29 \quad (\because x^2 - 4x + 29 > 0) \\ \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2, 7 \end{aligned}$$

より、求める x 座標は、 $x = 2, 7$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = 2, 7$$

(4)

(2)の増減表と(3)の結果より、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{1}{5}$ で囲まれた部分は下図の斜線部のようになる。



以上より求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_2^7 \left(\frac{x+3}{x^2 - 4x + 29} - \frac{1}{5} \right) dx \\ &= \int_2^7 \left(\frac{x+3}{x^2 - 4x + 29} \right) dx - \frac{1}{5} [x]_2^7 \\ &= \int_2^7 \left\{ \frac{x+3}{(x-2)^2 + 25} \right\} dx - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x = 2 + 5 \tan \theta$ ($-\pi < \theta < \pi$) とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{5}{\cos^2 \theta}$ であり、積分範囲の対応は以下のようになる。

x	2	$\rightarrow$	7
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって、

$$\begin{aligned} \int_2^7 \left\{ \frac{x+3}{(x-2)^2 + 25} \right\} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5(1 + \tan \theta)}{25(1 + \tan^2 \theta)} \cdot \frac{5}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan \theta) d\theta \\ &= [\theta - \log(\cos \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \log \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} - \log \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 - 1$$