

1

【解答】

(1)	(a)	ア	イ												
		9	2												
	(b)	ウ	エ	オ											
		2	5	2											
	(c)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ							
		1	5	6	1	3	1	0							
(2)	(a)	ス													
		9													
	(b)	セ	ソ	タ											
		9	3	3											
	(c)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ								
		1	3	3	9	3	9								
(3)		ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム			
		5	8	5	1	2	5	1	2	9	1	2			

【解説】

(1)(a)

【解説】

(1)(a)

ABの中点を点Mとすると、

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

である。外心の性質より、 $MO\perp AB$ であるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}&=0\\ \Leftrightarrow(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB}&=0\\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=\frac{9}{2}\left(\because|\overrightarrow{AB}|=AB=3\right)\end{aligned}$$

とわかる。

(b)

(a)と同様に、ACの中点を点Nとすると、 $NO\perp AC$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{AC}&=0\\ \Leftrightarrow(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{AC}&=0\\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}&=\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}&=\frac{25}{2}\left(\because|\overrightarrow{AC}|=AC=5\right)\end{aligned}$$

とわかる。

(c)

2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるので、 $\overrightarrow{AO}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

と表せる。このとき、(a), (b)の結果から、

$$\begin{aligned}\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{9}{2}\\\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{25}{2}\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})=\frac{9}{2}\\\overrightarrow{AC}\cdot(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})=\frac{25}{2}\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\begin{cases}s|\overrightarrow{AB}|^2+t|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle A=\frac{9}{2}\\s|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle A+t|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{25}{2}\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\begin{cases}9s+\frac{15}{\sqrt{2}}t=\frac{9}{2}\\\frac{15}{\sqrt{2}}s+25t=\frac{25}{2}\end{cases}&\\ \therefore s=1-\frac{5\sqrt{2}}{6}, t=1-\frac{3\sqrt{2}}{10}&\end{aligned}$$

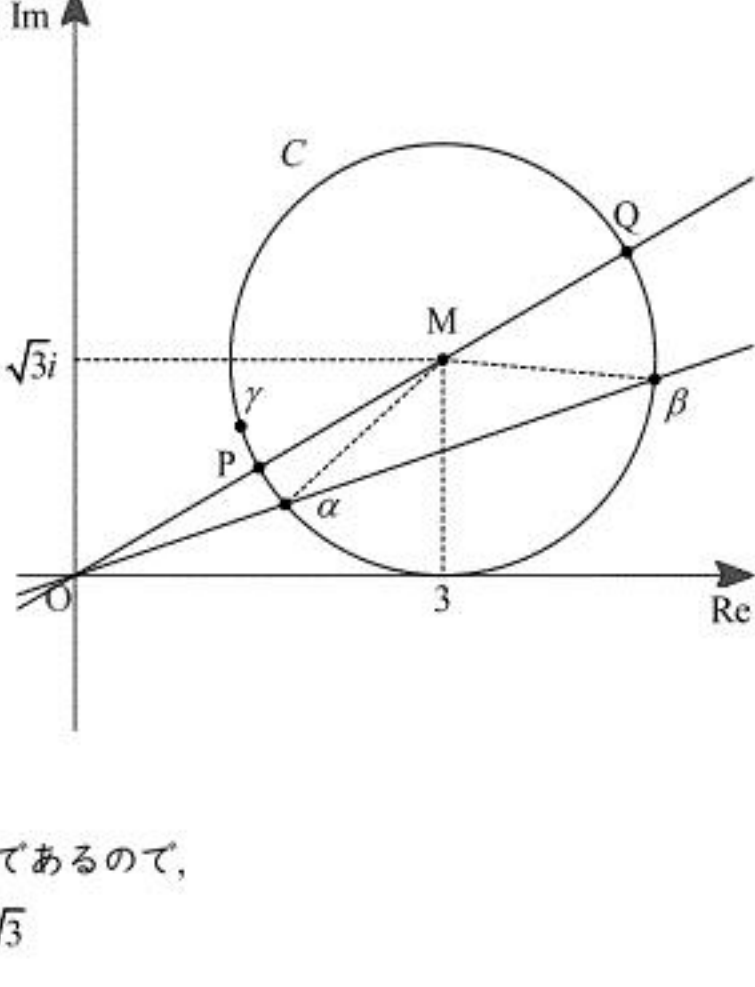
であるので、

$$\overrightarrow{AO}=\left(1-\frac{5}{6}\sqrt{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{3}{10}\sqrt{2}\right)\overrightarrow{AC}$$

とわかる。

(2)(a)

直線OMとCの交点を原点に近い方から点P, Qとする。



PM, MQはCの半径であるので、

$$PM=MQ=\sqrt{3}$$

である。また、

$$OM=|3+\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$$

より、

$$OQ=OM+MQ=3\sqrt{3}$$

である。よって、方べきの定理より、

$$\begin{aligned}|\alpha||\beta|&=OP\cdot OQ\\ &=(OM-PM)\cdot OQ\\ &=9\end{aligned}$$

とわかる。

(b)

点 α, β の定義より $\arg\alpha=\arg\beta$ である。また、

$$3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

より、点Mを表す複素数の偏角は $\frac{\pi}{6}$ である。点 γ はOMについて点 β と対称であるので、

$$\arg\beta-\frac{\pi}{6}=-\left(\arg\gamma-\frac{\pi}{6}\right)$$

が成り立つ。さらに、OMは原点を通るので、

$$|\beta|=|\gamma|$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\begin{cases}\arg\beta-\frac{\pi}{6}=-\left(\arg\gamma-\frac{\pi}{6}\right)\\ |\beta|=|\gamma|\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\begin{cases}\arg\beta+\arg\gamma=\frac{\pi}{3}\\ |\alpha||\gamma|=|\alpha||\beta|=9\end{cases}&\\ \Leftrightarrow\begin{cases}\arg\alpha\gamma=\frac{\pi}{3}\\ |\alpha\gamma|=9\end{cases}&\\ \therefore\alpha\gamma=9\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)&\end{aligned}$$

とわかる。

(c)

点 α がC上を一周するとき、 γ は α によって一意に定まり、重複はない。すなわち、点 γ の軌跡はCに一致する。(b)より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{\gamma}{9\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}\\ &=\frac{1}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\gamma\end{aligned}$$

と表せるので、点 $\frac{1}{\alpha}$ の軌跡は円Cを原点の周りに $-\frac{\pi}{3}$ 回転し、 $\frac{1}{9}$ 倍した円である。すなわち、

点 $\frac{1}{\alpha}$ の軌跡を円Dとすると、円Dの中心は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(3+\sqrt{3}i)\\ &=\frac{1}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &=\frac{2\sqrt{3}}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}i\end{aligned}$$

で表される点であり、半径は

$$\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

である。

(3)

条件より

$$x^2f(x)=3x^5+2x^4+x^3+2\int_0^xg(t)dt\qquad\cdots\cdots①$$

$$g(x)=xf'(x)+4x^3+x^2\int_{-1}^1g(t)dt\qquad\cdots\cdots②$$

$$f(-1)=g(-1)\qquad\cdots\cdots③$$

である。①の両辺を x で微分すると、

$$2xf'(x)+x^2f''(x)=15x^4+8x^3+3x^2+2g(x)\qquad\cdots\cdots④$$

となる。ここで、

$$\int_{-1}^1g(t)dt=k\qquad\cdots\cdots⑤$$

とおくと、②より

$$g(x)=xf'(x)+4x^3+kx^2\qquad\cdots\cdots⑥$$

であるから、⑥を④に代入すると、

$$\begin{aligned}2xf'(x)+x^2f''(x)&=15x^4+8x^3+3x^2+2xf'(x)+8x^3+2kx^2\\ \Leftrightarrow x^2f''(x)&=15x^4+16x^3+(2k+3)x^2\\ \Leftrightarrow f''(x)&=15x^2+16x+(2k+3)(\because x \text{ は任意の値})\end{aligned}$$

となる。ここで積分定数をCとし、上式を x で不定積分すると

$$\begin{aligned}f(x)&=\int(15x^2+16x+2k+3)dx\\ \Leftrightarrow f(x)&=5x^3+8x^2+(2k+3)x+C\qquad\cdots\cdots⑦\end{aligned}$$

を得る。これを⑥に代入して整理すると、

$$g(x)=5x^4+12x^3+3(k+1)x^2+Cx\qquad\cdots\cdots⑧$$

となり、これを⑤に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\left\{5t^4+12t^3+3(k+1)t^2+Ct\right\}dt&=k\\ \Leftrightarrow\left[t^5+3t^4+(k+1)t^3+\frac{1}{2}Ct^2\right]_{-1}^1&=k\\ \Leftrightarrow 2+2(k+1)&=k\\ \Leftrightarrow k&=-4\end{aligned}$$

を得る。これを⑦、⑧に代入すると、

$$\begin{cases}f(x)=5x^3+8x^2-5x+C\\ g(x)=5x^4+12x^3-9x^2+Cx\end{cases}\qquad\cdots\cdots⑨$$

を得る。最後に $f(-1)=g(-1)$ より、

$$\begin{aligned}f(-1)&=g(-1)\\ \Leftrightarrow -5+8+5+C&=5-12-9-C\\ \Leftrightarrow C&=-12\end{aligned}$$

であるから、これを⑥に代入して、

$$\begin{cases}f(x)=5x^3+8x^2-5x-12\\ g(x)=5x^4+12x^3-9x^2-12x\end{cases}$$

とわかる。

2

(1)

$n=2$ のとき、タイルの貼りは S 型を 1 枚貼る方法のみであり、S 型のタイルは 3 種類あるので

$$a_2=3$$

である。また、 $n=3$ のとき、タイルの貼りは L 型を 1 枚貼る方法のみであり、L 型のタイルは 2 種類あるので

$$a_3=2$$

である。

$$(\text{答}) \ a_2=3, \ a_3=2$$

(2)

横の長さが $n+3$ の壁にタイルを貼るとき、1 番右のタイルは S 型、L 型のいずれかである。以下、1 番右のタイルの型で場合分けして考える。

[1] 1 番右のタイルが S 型のとき

残りの長さ $n+1$ の壁へのタイルの貼りは a_{n+1} 通りである。S 型のタイルは 3 種類あるので、タイルの貼りは全部で $3a_{n+1}$ 通りである。

[2] 1 番右のタイルが L 型のとき

残りの長さ n の壁へのタイルの貼りは a_n 通りである。L 型のタイルは 2 種類あるので、タイルの貼りは全部で $2a_n$ 通りである。

以上、[1], [2] より、[1], [2] となる事象は排反であるので、

$$a_{n+3}=3a_{n+1}+2a_n$$

である。

$$(\text{答}) \ a_{n+3}=3a_{n+1}+2a_n$$

(3)

$b_n=a_n+a_{n+1}$ より、(2) の結果も用いて、

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+2} + a_{n+3} \\ &= a_{n+2} + (3a_{n+1} + 2a_n) \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + 2(a_n + a_{n+1}) \\ &= b_{n+1} + 2b_n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ b_{n+2}=b_{n+1}+2b_n$$

(4)

$c_n=b_{n+1}-qb_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+2} - qb_{n+1} \\ &= (b_{n+1} + 2b_n) - qb_{n+1} \\ &= (1-q)(b_{n+1} - qb_n) - (q^2 - q - 2)b_n \\ &= (1-q)c_n - (q^2 - q - 2)b_n \end{aligned}$$

であるので、 $\{c_n\}$ が等比数列となるのは、

$$\begin{cases} 1-q \neq 0 \\ q^2 - q - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore q = -1, 2$$

となるときである。また、 $q=-1$ のとき、

$$c_{n+1}=2c_n$$

より、公比 $r=2$ であり、 $q=2$ のとき、

$$c_{n+1}=-c_n$$

より、公比 $r=-1$ である。

$$(\text{答}) \ (q, r) = (-1, 2), (2, -1)$$

(5)

以下、 q の値で場合分けしてそれぞれ調べる。

[1] $q=-1$ のとき

$$c_n=b_{n+1}+b_n$$

であり、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2c_n \\ \Leftrightarrow b_{n+2} + b_{n+1} &= 2(b_{n+1} + b_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + b_n &= 2^{n-1}(b_2 + b_1) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + b_n &= 2^{n-1}\{(a_2 + a_3) + (a_1 + a_2)\} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + b_n &= 2^{n-1}(3 + 2 + 0 + 3) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + b_n &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $q=2$ のとき

$$c_n=b_{n+1}-2b_n$$

であり、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= -c_n \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - 2b_{n+1} &= -(b_{n+1} - 2b_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n &= (-1)^{n-1}(b_2 - 2b_1) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n &= (-1)^{n-1}\{(a_2 + a_3) - 2(a_1 + a_2)\} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 2b_n &= (-1)^{n-1}(3 + 2 - 0 - 6) \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - 2b_n &= (-1)^n \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2] より、

$$\begin{cases} b_{n+1} + b_n = 2^{n+2} \\ b_{n+1} - 2b_n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{3}\{2^{n+2} - (-1)^n\}$$

である。

$$(\text{答}) \ b_n = \frac{1}{3}\{2^{n+2} - (-1)^n\}$$

(6)

n の偶奇で場合分けして考える。以下、 m を自然数とする。

[1] n が奇数のとき

$n \geq 3$ のとき、 $n=2m+1$ と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + \sum_{k=1}^m b_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^m b_{2k} \quad (\because a_1=0) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \{2^{2k+2} - (-1)^{2k}\} \\ &= \frac{1}{3} \left(2^4 \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^2-1} - m \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(16 \cdot \frac{2^{n-1}-1}{3} - \frac{n-1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{18} (2^{n+4} - 3n - 29) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\frac{1}{18} (2^{1+4} - 3 \cdot 1 - 29) = 0$$

であるから、これは $n=1$ のときも成り立つ。よって、すべての奇数 n について、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{18} (2^{n+4} - 3n - 29)$$

である。

[2] n が偶数のとき

$n=2m$ と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^m b_{2k-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \{2^{2k+1} - (-1)^{2k-1}\} \\ &= \frac{1}{3} \left(2^3 \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^2-1} + m \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(8 \cdot \frac{2^n-1}{3} + \frac{n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{18} (2^{n+4} + 3n - 16) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{18} (2^{n+4} + 3n - 16)$$

である。

以上[1], [2]より、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{1}{18} (2^{n+4} - 3n - 29) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{18} (2^{n+4} + 3n - 16) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \ \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{1}{18} (2^{n+4} - 3n - 29) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{18} (2^{n+4} + 3n - 16) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(7)

$n \geq 2$ のとき、 $a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ であるので、(6) の結果より、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ \Leftrightarrow a_n &= \begin{cases} \frac{1}{18} (2^{n+4} - 3n - 29) - \frac{1}{18} \{2^{(n-1)+4} + 3(n-1) - 16\} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{18} (2^{n+4} + 3n - 16) - \frac{1}{18} \{2^{(n-1)+4} - 3(n-1) - 29\} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{9} \{2^{n+2} + (-1)^n (3n+5)\} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\frac{1}{9} \{2^{1+2} + (-1)(3 \cdot 1 + 5)\} = 0$$

であるから、これは $n=1$ のときも成り立つ。よって、

$$a_n = \frac{1}{9} \{2^{n+2} + (-1)^n (3n+5)\}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_n = \frac{1}{9} \{2^{n+2} + (-1)^n (3n+5)\}$$

(1)(a)

 $f(x) = xe^x - e^x - x - 1$ について、 $f(a) = 0$ から

$$f(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow ae^a - e^a - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 1 = e^a (a - 1)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(-a) &= -ae^{-a} - e^{-a} + a - 1 \\ &= -e^{-a}(a+1) + a - 1 \\ &= -e^{-a} \cdot e^a (a-1) + a - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $f(-a) = 0$

(b)

 $f(x) = xe^x - e^x - x - 1$ について、

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1$$

$$f''(x) = e^x (x+1)$$

である。 $x > 0$ のとき、 $f''(x) > 0$ であるので、 $f'(x)$ は単調増加である。また、

$$f'(0) = -1 < 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$$

より、 $f'(x) = 0$ の実数解は $x > 0$ の範囲にただ1つである。この実数解を α とすると、増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{(x-1)(e^x - 1) - 2\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となるから増減表より、方程式 $f(x) = 0$ は正の実数解を1つもつ。

(答) 1つ

(2)(a)

$$g(x) = e^x, h(x) = \log(x)$$

とおくと、

$$g'(x) = e^x, h'(x) = \frac{1}{x}$$

であるので、 C_1 の点 (a, e^a) における接線の方程式、 C_2 の点 $(b, \log b)$ における接線の方程式

は、それぞれ

$$\begin{aligned} y - e^a &= e^a (x - a) \\ \Leftrightarrow y &= e^a x - (a-1)e^a \\ y - \log b &= \frac{1}{b} (x - b) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{b} x + \log b - 1 \end{aligned}$$

である。 l は C_1 と C_2 の共通の接線であるので、上2式の係数を比較して、

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ -(a-1)e^a = \log b - 1 \end{cases}$$

$$\therefore b = \frac{a-1}{a+1}$$

とわかる。

(答) $b = \frac{a-1}{a+1}$

(b)

(2)(a)より、 $e^a = \frac{1}{b}$ かつ $b = \frac{a-1}{a+1}$ であるので、

$$\begin{aligned} e^a &= \frac{a+1}{a-1} \\ \Leftrightarrow ae^a - e^a - a - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 a は $f(x) = 0$ の解である。(1)(b)より $f(x) = 0$ の正の実数解は1つであり、こ

れを β とすると、(1)(a)より $-\beta$ も $f(x) = 0$ の実数解となる。 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ であるので、(1)(b)

の増減表より、 $f(x) = 0$ の解は $\beta, -\beta$ の2つのみである。このとき、共通接線の傾きは(2)(a)

より e^a であるので、

$$m_1 = e^\beta, m_2 = e^{-\beta}$$

となり、

$$m_1 m_2 = e^\beta e^{-\beta} = 1$$

とわかる。

(答) $m_1 m_2 = 1$

(c)

$y = \log x$ は $y = e^x$ の逆関数であるので、 C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称である。また、共通接線は2本のみであるので、 $e^\beta, e^{-\beta} \neq 1$ より2接線 l_1, l_2 についても直線 $y = x$ に関して対称である。以上より、 C_1, l_1, l_2 に囲まれた部分と C_2, l_1, l_2 に囲まれた部分は直線 $y = x$ に関して対称であるので、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} &= 1 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $\frac{S_1}{S_2} = 1$