

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ		
		4	4	5	1	3	0		
	(b)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ		
		1	4	3	6	3	0		
(2)	(a)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
		9	1	0	0	9	2	5	0
	(b)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	
		1	1	9	1	0	1	0	

【解説】

(1)(a)

取り出した玉を袋に戻さない場合、 n 回目までの玉の取り出し方の総数は ${}_{10}P_n$ 通りあり、これらは同様に確からしい。2回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10になるのは、番号の組み合わせが $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)$ のときであるから、そのような取り出し方は $2 \cdot 4 = 8$ 通り存在する。よって、

$$p_2 = \frac{8}{{}_{10}P_2} = \frac{4}{45}$$

となる。同様に、3回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10になるのは、番号の組み合わせが $(1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$ のときであるから、そのような取り出し方は $6 \cdot 4 = 24$ 通り存在する。よって、

$$p_3 = \frac{24}{{}_{10}P_3} = \frac{1}{30}$$

となる。

(b)

(a)と同様に考えると、1回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10になる取り出し方は、10が書かれた玉を取り出す1通りであり、

$$p_1 = \frac{1}{{}_{10}P_1} = \frac{1}{10}$$

となる。また、4回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10になるのは、番号の組み合わせが $(1, 2, 3, 4)$ のときであるから、取り出し方は全部で $4! = 24$ 通りである。よって、

$$p_4 = \frac{24}{{}_{10}P_4} = \frac{1}{210}$$

となる。5回目までに取り出した玉の番号の合計の最小値は $1+2+3+4+5=15>10$ であるので、 $n \geq 5$ のとき $p_n = 0$ である。以上より、

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{10} = \frac{1}{10} + \frac{4}{45} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} = \frac{143}{630}$$

となる。

(2)(a)

各回で取り出した玉を戻す場合、 n 回目までの玉の取り出し方の総数は 10^n 通りあり、これらは同様に確からしい。2回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10になるのは、番号の組み合わせが $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$ のときであるから、そのような取り出し方は $2 \cdot 4 + 1 = 9$ 通り存在する。よって、

$$q_2 = \frac{9}{10^2} = \frac{9}{100}$$

となる。同様に、3回目までに取り出した玉に書かれている番号の合計が10であるのは、番号の組み合わせが $(1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$ のときである。取り出し方は、同じ番号を2個含む組においては3通り、同じ番号を含まない組においては $3! = 6$ 通りであるので、全部で $3 \cdot 4 + 3! \cdot 4 = 36$ 通りである。よって、

$$q_3 = \frac{36}{10^3} = \frac{9}{250}$$

となる。

(b)

n 回目までに取り出した玉の番号の合計が10である確率 q_n を求める。玉の番号の最小値は1であるので、そのような玉の取り出し方は、区別のない10個のボールを n 個の区別された箱に、1つの箱に少なくとも1つはボールが入るように振り分けて入れる場合の数に等しい。さらに最初に n 個の箱に1個ずつボールを入れると、残りの $10-n$ 個のボールを n 個の区別された箱に入れる場合の数を考えればよく、この場合の数は $10-n$ 個の丸(O)と $n-1$ 個の区切り(|)の並べ方の総数に等しい。よって、玉の取り出し方は、 ${}_{(10-n)+(n-1)}C_{n-1} = {}_9C_{n-1}$ 通りである。よって、

$$q_n = \frac{{}_9C_{n-1}}{10^n}$$

となる。以上より、二項定理から

$$\begin{aligned} & q_1 + q_2 + \cdots + q_{10} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{{}_9C_{k-1}}{10^k} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{\ell=0}^9 {}_9C_{\ell} \cdot 10^{-\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{\ell} \quad (\because k-1=\ell \text{ と置換}) \\ &= \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{10} \right)^9 \\ &= \frac{11^9}{10^{10}} \end{aligned}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned} & \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y) \\ &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y + \sin x \sin y)^2 \\ &= \sin^2 x \cos^2 y + 4 \sin x \cos x \sin y \cos y + \cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 y + \cos^2 y) + 2 \sin x \cos x \cdot 2 \sin y \cos y \\ &= 1 + \sin 2x \sin 2y \end{aligned}$$

である。

(答) $1 + \sin 2x \sin 2y$

(2)

$\beta = \frac{1+i}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}(1+i)$ より, $\alpha = a+ib, \beta = x+iy$ であるとき,

$$\begin{aligned} x+iy &= \frac{1+i}{2}(a+ib) + \frac{\pi}{4}(1+i) \\ \therefore x+iy &= \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)i \end{aligned}$$

である。 x, y, a, b 及び $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}$ は実数であるので, 実部と虚部をそれぞれ比較す

ると

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \therefore \begin{cases} x+y = a + \frac{\pi}{2} \\ x-y = -b \end{cases} \end{cases}$$

とわかる。

(答) $x+y = a + \frac{\pi}{2}, x-y = -b$

(3)

$\alpha = a+ib$ より,

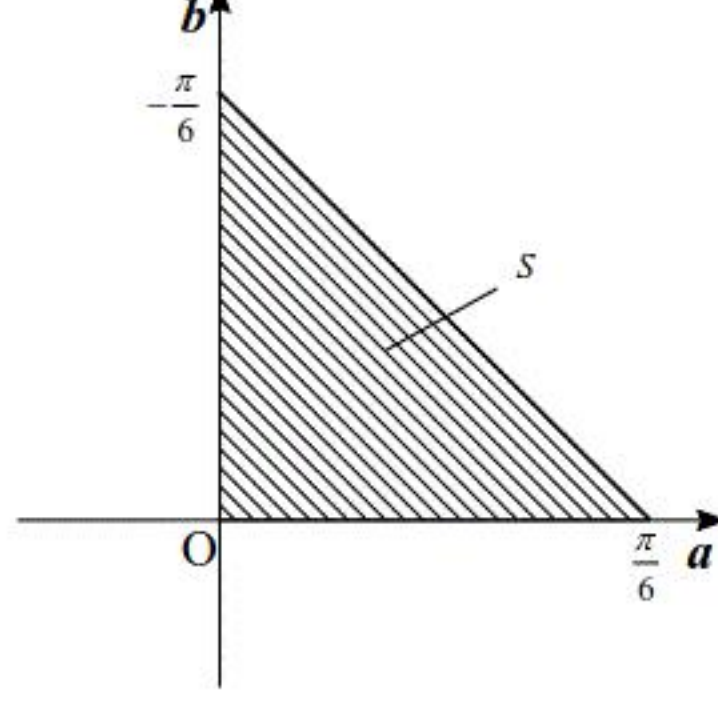
$$\begin{aligned} |\alpha + \overline{\alpha}| + |\alpha - \overline{\alpha}| &\leq \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow |a+ib+a-ib| + |a+ib-(a-ib)| &\leq \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow |2a| + |-2bi| &\leq \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 2|a| + 2|b||i| &\leq \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$\therefore |a| + |b| \leq \frac{\pi}{6} \quad \dots \textcircled{1}$

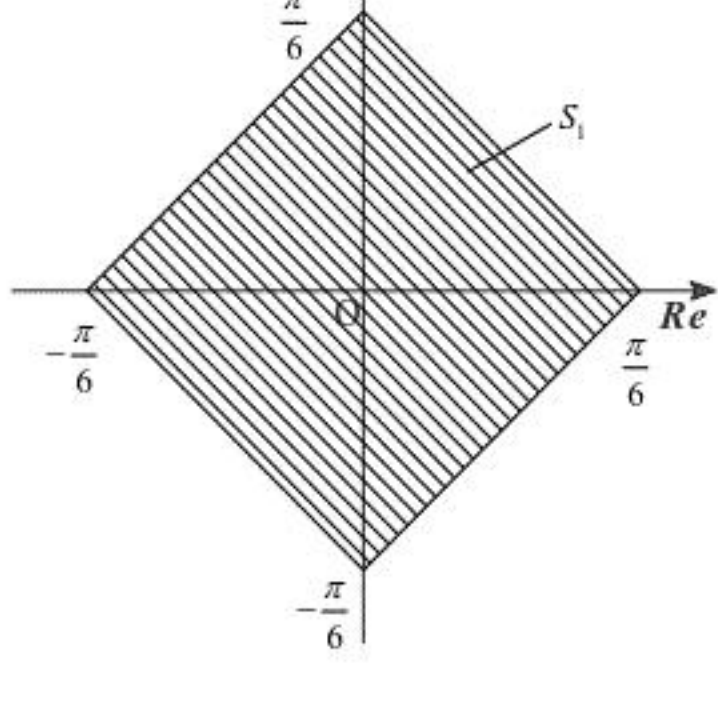
である。 α の実部は a , 虚部は b であるので, ①式によって表される領域は実軸, 虚軸に関して対象である。よって, $a \geq 0, b \geq 0$ の範囲について考えると, ①式は

$$a+b \leq \frac{\pi}{6}$$

となるので, a, b の動く領域 S は下図の斜線部のようになる。



①が表す領域は, 上図で示した領域 S に加え, それを a 軸, b 軸, 原点に関して対称移動したものとなる。よって, α の実部は a , 虚部は b であることから, 領域 S_1 は次図の斜線部のようになる。ただし, 境界を含む。



(答) 前図 (境界を含む)

(4)(a)

S_2 は, $\alpha = a+bi$ が $|a|+|b| \leq \frac{\pi}{6}$ をみたして動くときに $\beta = x+yi$ が通過する領域である。(3)の

図より, 領域 $S_1 : |a|+|b| \leq \frac{\pi}{6}$ 内の点は

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a - \frac{\pi}{6} \leq b \leq a + \frac{\pi}{6} \\ -a - \frac{\pi}{6} \leq b \leq -a + \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq a-b \leq \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} \leq a+b \leq \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たすと分かる。(2)より,

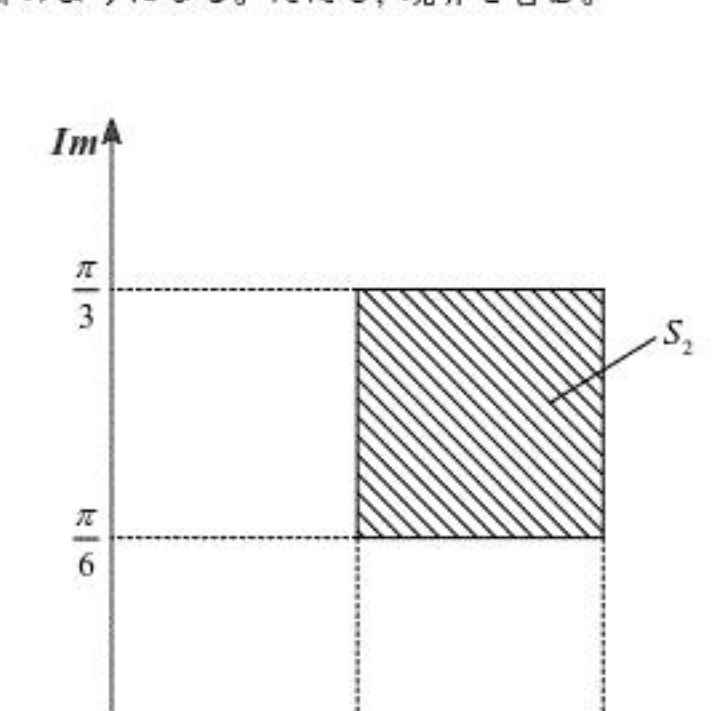
$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a-b = 2x - \frac{\pi}{2} \\ a+b = 2y - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となるから, ①, ②より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} \leq 2y - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。よって, $\beta = x+yi$ は実部, 虚部が共に $\frac{\pi}{6}$ 以上 $\frac{\pi}{3}$ 以下の領域を動くから, 求める

領域 S_2 は下図の斜線部のようになる。ただし, 境界を含む。



(答) 前図 (境界を含む)

(b)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+y = a + \frac{\pi}{2} \\ x-y = -b \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} a = x+y - \frac{\pi}{2} \\ b = -x+y \end{cases} \end{aligned}$$

であるので, (1)より,

$$\begin{aligned} |\cos a + i \cos b|^2 &= \cos^2 a + \cos^2 b \\ &= \cos^2 \left(x+y - \frac{\pi}{2} \right) + \cos^2 (-x+y) \\ &= \sin^2 (x+y) + \cos^2 (x-y) \\ &= 1 + \sin 2x \sin 2y \end{aligned}$$

である。ここで, (a)より,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \leq 2y \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2y \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となるので,

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1 + \sin 2x \cdot \sin 2y \leq 1 + 1 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq |\cos a + i \sin b|^2 \leq 2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{7}}{2} \leq |\cos a + i \sin b| \leq \sqrt{2} \quad (\because |\cos a + i \sin b| \geq 0)$$

とわかる。よって, $|\cos a + i \cos b|$ のとり得る値の最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は $\frac{\sqrt{7}}{2}$ である。

(答) 最大値: $\sqrt{2}$, 最小値: $\frac{\sqrt{7}}{2}$