

【解答】

解答															
(1)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
		1	1	8	5	1	4	3	1	1	3	2	3	5	3
(2)	(a)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ		
		6	4	5	2	2	2	4	2	4	3	4	2		
	(b)	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ		
		1	6	0	2	3	1	1	6	1	0	3	1		
(3)		ラ	リ	ル	レ	ロ									
		6	1	2	6	3									

【解説】

(1)

$$x=1+\cos t, y=-1+2\sqrt{2}\sin t \text{ より}$$

$$\cos t = x-1, \sin t = \frac{y+1}{2\sqrt{2}}$$

である。これらを $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して

$$(x-1)^2 + \left(\frac{y+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

であり、これは曲線 C の方程式である。この方程式に $y=x+k$ を代入すると

$$(x-1)^2 + \frac{(x+k+1)^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow 8(x^2 - 2x + 1) + \{x^2 + 2(k+1)x + (k+1)^2\} - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 2(k-7)x + (k+1)^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。曲線 C と直線 $y=x+k$ が接するとき、方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-7)^2 - 9(k+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \{(k-7)+3(k+1)\}\{(k-7)-3(k+1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4k-4)(-2k-10) = 0$$

$$\therefore k = -5, 1$$

となる。 $k=-5$ のとき、方程式①の解は

$$x = \frac{-(k-7)}{9} = \frac{4}{3}$$

であり、このとき

$$y = x+k = \frac{4}{3} - 5 = -\frac{11}{3}$$

であるから、接点の座標は $\left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ である。また $k=1$ のとき、方程式①の解は

$$x = \frac{-(k-7)}{9} = \frac{2}{3}$$

であり、このとき

$$y = x+k = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

であるから、接点の座標は $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ である。

(2)(a)

整式 $f(x)$ が $x-2$ で割り切れるとき、因数定理より

$$f(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 12a + 2b + 1 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(a^2 - 12a - 9)$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\{(a-6)^2 - 45\}$$

となる。よって、 b の値が最小となるのは $a=6$ のときであり、その値は $-\frac{45}{2}$ である。このと

き、偶関数の性質と部分積分法を用いることにより

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 e^{|x|} dx &= 2 \int_0^1 x^2 e^x dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (e^x)' dx \\ &= 2 \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 4 \int_0^1 x e^x dx \\ &= 2e - 4 \int_0^1 x e^x dx \\ &= 2e - 4 \int_0^1 x (e^x)' dx \\ &= 2e - 4 \left[x e^x \right]_0^1 + 4 \int_0^1 e^x dx \\ &= 2e - 4e + 4 \left[e^x \right]_0^1 \\ &= -2e + 4e - 4 \\ &= 2e - 4 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) = (x^3 + bx)e^{|x|}$ とすると、 $g(-x) = -g(x)$ が成り立つから $g(x)$ は奇関数

である。したがって、

$$\int_{-1}^1 (x^3 + bx)e^{|x|} dx = 0$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)e^{|x|} dx &= \int_{-1}^1 (x^3 + 3ax^2 + bx + 1 - a^2)e^{|x|} dx \\ &= 3a \int_{-1}^1 x^2 e^{|x|} dx + (1 - a^2) \int_{-1}^1 e^{|x|} dx \\ &= 3 \cdot 6 \cdot (2e - 4) + 2(1 - 6^2) \int_0^1 e^x dx \\ &= 36e - 72 - 70 \left[e^x \right]_0^1 \\ &= 36e - 72 - 70(e - 1) \\ &= -34e - 2 \end{aligned}$$

となる。

(b)

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + b$$

となる。 $x_1 = 1 \neq 0$ であるから

$$x_2 = 3 + 6a + b$$

であり、 $x_2 = 2 \neq 0$ となるとき

$$x_3 = \frac{1}{2}(12 + 12a + b)$$

である。よって、 $x_2 = 2, x_3 = 5$ となるとき

$$\begin{cases} 3 + 6a + b = 2 \\ \frac{1}{2}(12 + 12a + b) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3x_{n-1}^2 - x_{n-1}}{x_{n-1}} \\ \Leftrightarrow x_n &= 3x_{n-1} - 1 \\ \Leftrightarrow x_n - \frac{1}{2} &= 3\left(x_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

であり、数列 $\left\{x_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 、公比 3 の等比数列となるから

$$x_n - \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{3^{n-1}}{2} + \frac{1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。また、 $x_2 = 2, x_3 = 0$ となるとき

$$\begin{cases} 3 + 6a + b = 2 \\ \frac{1}{2}(12 + 12a + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{11}{6}, 10\right)$$

であり、このとき

$$x_4 = 1, x_5 = \frac{3 + 6a + b}{1} = 2, x_6 = \frac{12 + 12a + b}{2} = 0, \dots$$

となり、数列 $\{x_n\}$ は 1, 2, 0 から成る周期 3 の周期数列である。また、その一般項は自然数 k を

用いて

$$x_{3k-2} = 1, x_{3k-1} = 2, x_{3k} = 0$$

と表せる。したがって、 $31 = 3 \cdot 11 - 2$ より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{31} x_n &= \sum_{k=1}^{11} x_{3k-2} + \sum_{k=1}^{10} x_{3k-1} + \sum_{k=1}^{10} x_{3k} \\ &= 1 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 10 \\ &= 31 \end{aligned}$$

である。

(3)

p が素数のとき p^5 は正の約数をちょうど $5+1=6$ 個持つ。また、条件(*)を満たす自然数は、

$6=2 \cdot 3$ であることから異なる素数 a, b を用いて

$$ab^2 \text{ あるいは } a^5$$

と表される。 ab^2 の形の最小の自然数は、 $a=3, b=2$ のときの $ab^2=12$ である。 a^5 の形の最小

の自然数は、 $a=2$ のときの $a^5=32$ である。 $12 < 32$ より、条件(*)を満たす最小の自然数は 12

である。

また、条件(*)を満たす正の奇数は a, b がともに 2 ではない場合であり、そのうち 2 番目に小

さいのは、 $a, b=3, 5, 7$ (順不同) として適当に代入して調べると、

$$a=3 \text{ のとき } 3 \cdot 5^2 = 75, 3 \cdot 7^2 = 147, 3^5 = 243$$

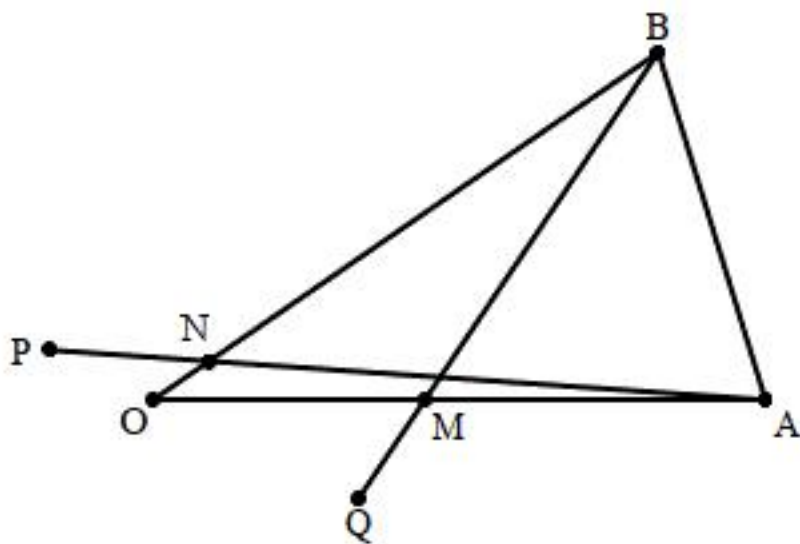
$$a=5 \text{ のとき } 5 \cdot 3^2 = 45, 5 \cdot 7^2 = 245$$

$$a=7 \text{ のとき } 7 \cdot 3^2 = 63, 7 \cdot 5^2 = 175$$

となるから、63 である。

2

(1)



Mは辺OAを $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OM} = s\vec{a}$$

と表せる。また、Nは辺OBを $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{ON} = t\vec{b}$$

と表せる。したがって、P、Qはそれぞれ線分AN、BMを $(1+u):u$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{-u\overrightarrow{OA} + (1+u)\overrightarrow{ON}}{(1+u)-u} = -u\vec{a} + (1+u)t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{-u\overrightarrow{OB} + (1+u)\overrightarrow{OM}}{(1+u)-u} = (1+u)s\vec{a} - u\vec{b}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = -u\vec{a} + (1+u)t\vec{b}, \quad \overrightarrow{OQ} = (1+u)s\vec{a} - u\vec{b}$$

(2)

3点O、P、Qが同一直線上にあるとすると、実数 v を用いて

$$\overrightarrow{OP} = v\overrightarrow{OQ}$$

と表せる。(1)より、この式は

$$-u\vec{a} + (1+u)t\vec{b} = (1+u)sv\vec{a} - uv\vec{b}$$

となり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} -u = (1+u)sv & \dots\dots ① \\ (1+u)t = -uv & \dots\dots ② \end{cases}$$

が得られる。ここで①において、 $u > 0, 1+u > 0, s > 0$ より $v < 0$ である。②に①を代入して

$$(1+u)t = (1+u)sv^2$$

となり、 $1+u \neq 0, s \neq 0$ より

$$v^2 = \frac{t}{s}$$

である。 $v < 0$ から

$$v = -\sqrt{\frac{t}{s}}$$

と求まるので①に代入して

$$\begin{aligned} -u &= (1+u)s \cdot \left(-\sqrt{\frac{t}{s}}\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{st} &= u(1-\sqrt{st}) \end{aligned}$$

となる。 $0 < s < 1, 0 < t < 1$ より $0 < 1-\sqrt{st} < 1$ なので

$$u = \frac{\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad u = \frac{\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}$$

(3)

A(1, 0), B(cos θ , sin θ), $s = \frac{4}{9}, t = \frac{1}{9}$ であり、3点O、P、Qが同一直線上にあるので、(2)の結果

が利用でき、

$$u = \frac{\frac{\sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}}}{1 - \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}}} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{2}{7}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= -\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{9}\vec{b} \\ &= -\frac{2}{7}(1, 0) + \frac{1}{7}(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \left(\frac{\cos \theta - 2}{7}, \frac{\sin \theta}{7}\right) \end{aligned}$$

とわかる。直線 $y = x + k$ が点Pを通るので

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{7} &= \frac{\cos \theta - 2}{7} + k \\ \therefore k &= \frac{2 + \sin \theta - \cos \theta}{7} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2 + \sin \theta - \cos \theta}{7}$$

(4)

(3)より、三角関数の合成を利用して

$$k = \frac{2 + \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{7}$$

となる。 $0 < \theta < \pi$ より、 $-\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ なので

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

であることから、

$$-1 < \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$1 < 2 + \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 + \sqrt{2}$$

となり、 k のとり値の範囲は

$$\frac{1}{7} < k \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{7}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{7} < k \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{7}$$

(1)

$f(x)$ について、 $f'(x) = (-2) \cdot x^{-3}$ より、点 P における法線の傾きは

$$-\frac{1}{(-2) \cdot t^{-3}} = \frac{t^3}{2}$$

となる。よって、法線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= \frac{t^3}{2}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{t^3}{2}x - \frac{t^4}{2} + \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

となる。また、点 Q の座標について、法線 ℓ の方程式に $x = q, y = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{t^3}{2}q - \frac{t^4}{2} + \frac{1}{t^2} \\ \Leftrightarrow \frac{t^3}{2}q &= \frac{t^6 - 2}{2t^2} \\ \Leftrightarrow q &= \frac{t^6 - 2}{t^5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = \frac{t^3}{2}x - \frac{t^4}{2} + \frac{1}{t^2}, \quad q = \frac{t^6 - 2}{t^5}$$

(2)

$q = 0$ となるのは、 $t_1 > 0$ に注意すると、

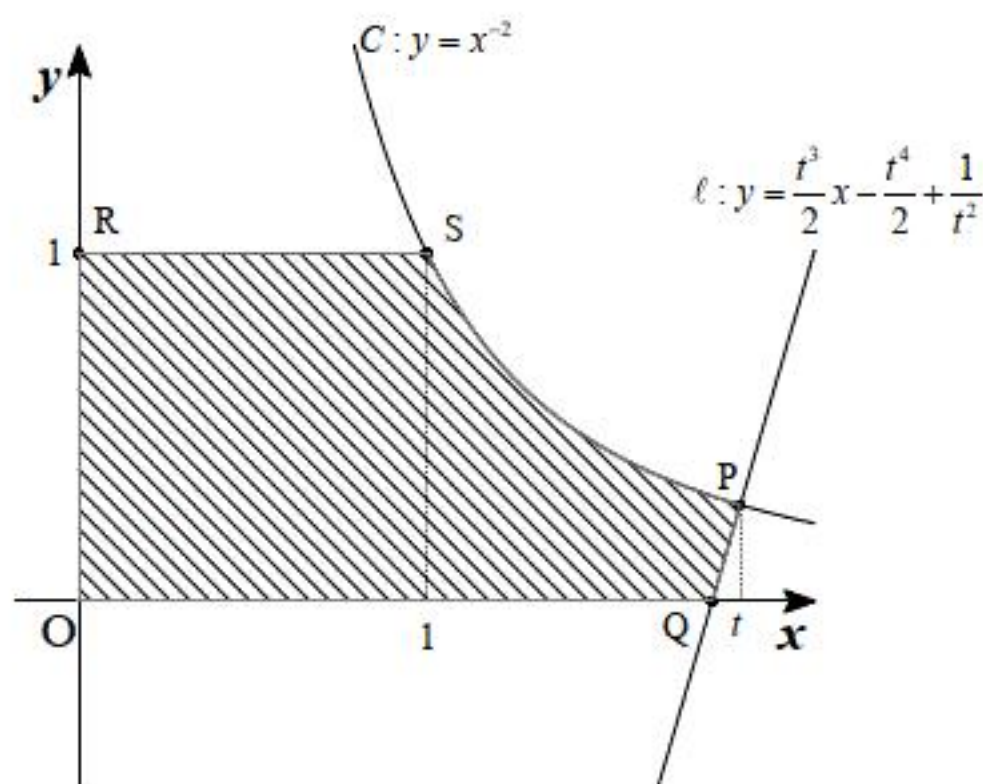
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{t_1^6 - 2}{t_1^5} \\ \Leftrightarrow t_1^6 &= 2 \\ \Leftrightarrow t_1 &= 2^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad t_1 = 2^{\frac{1}{6}}$$

(3)

曲線 C 、点 P, Q, S, R 、法線 ℓ を図示すると下図を得る。ここで、求める面積は下図斜線部の面積である。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} A(t) &= 1 \cdot 1 + \int_1^t x^{-2} dx - \frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{t^6 - 2}{t^5} \right) \cdot \frac{1}{t^2} \\ &= 1 + \left[-x^{-1} \right]_1^t - \frac{1}{2} \cdot 2t^{-5} \cdot t^{-2} \\ &= 1 - t^{-1} + 1 - t^{-7} \\ &= 2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^7} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A(t) = 2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^7}$$

(4)

$A(t) = 2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^7}$ であるので、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^7} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 2$$