

【解説】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ						
	4	5	1	8	5	5						
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	5	8	1	0	2	1	4	2	5	1	0	
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ			
	2	3	5	2	5	4	5	2	5			

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 x=18^{\circ} \text{ とするとき,} \\
 \sin 2x &= \cos 3x \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x &= 4 \cos^2 x - 3 \quad (\because \cos x \neq 0) \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x &= 4(1 - \sin^2 x) - 3 \\
 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。これを解くと、

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となり、 $0 < x < 90^{\circ}$ において $\sin x > 0$ であるから、 $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。よって、

$$\sin 18^{\circ} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ である。また、半角の公式より、}$$

$$(\sin 36^{\circ})^2 = \frac{1 - \cos 72^{\circ}}{2}$$

と変形でき、 $\cos 72^{\circ} = \sin(90 - 72)^{\circ} = \sin 18^{\circ}$ であるから、

$$\frac{1 - \cos 72^{\circ}}{2} = \frac{1 - \sin 18^{\circ}}{2}$$

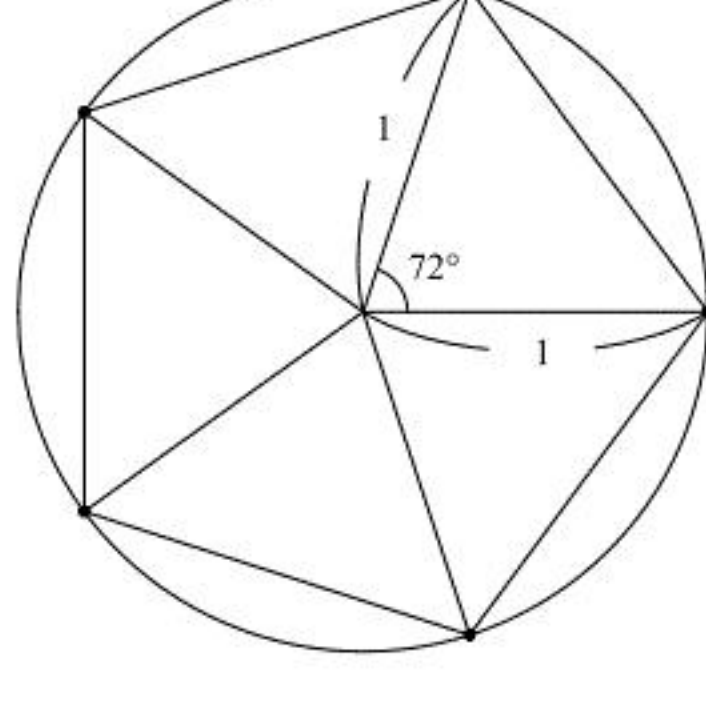
である。よって、

$$\begin{aligned}
 (\sin 36^{\circ})^2 &= \frac{1 - \sin x}{2} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)}{2} \\
 &= \frac{4 - (\sqrt{5} - 1)}{8} \\
 &= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\
 &= \frac{1}{8}(5 - \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

まず、半径1の円に内接する正五角形について、円の中心から各頂点までを結び分割すると、下図のようになる。



求める面積を T_1 とおくと、

$$T_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 72^{\circ} \right) = \frac{5}{2} \sin 72^{\circ} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで、 $\sin 72^{\circ} = \sin(90 - 18)^{\circ} = \cos 18^{\circ}$ であり、 $\cos 18^{\circ} > 0$ であるから、(1)より、

$$\begin{aligned}
 \sin 72^{\circ} &= \cos 18^{\circ} \\
 &= \sqrt{1 - \sin^2 18^{\circ}} \\
 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{8}} \\
 &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \\
 &= \frac{5}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

となる。次に、1辺の長さが1である正五角形について、外接する円の半径を r とおくと余弦定理より、

$$\begin{aligned}
 r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 72^{\circ} &= 1 \\
 \Leftrightarrow r^2 &= \frac{1}{2(1 - \cos 72^{\circ})}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。(1)より、 $1 - \cos 72^{\circ} = 2 \sin^2 36^{\circ}$ であるから、

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{4 \sin^2 36^{\circ}}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

となる。求める面積を T_2 とおくと、①より、

$$T_2 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 72^{\circ} \quad \cdots \textcircled{2}$$

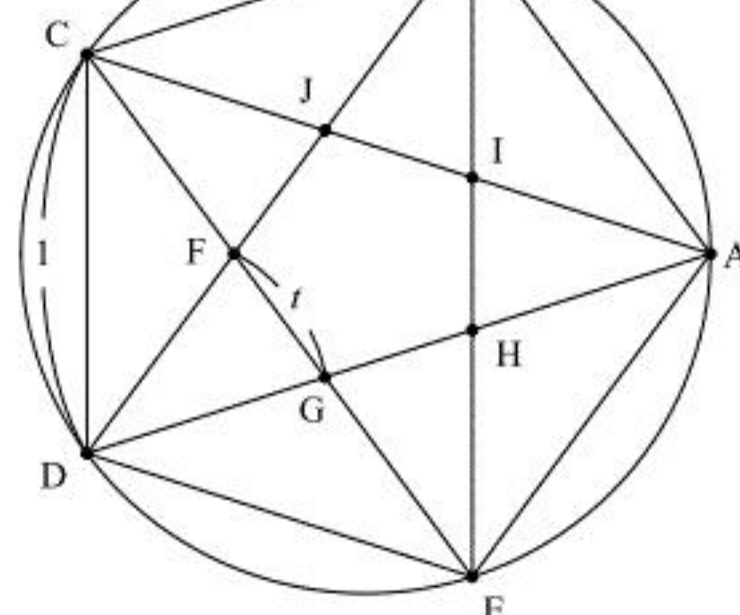
$$\Leftrightarrow T_2 = r^2 \cdot T_1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{2}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{(5 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{2 \cdot (5 + \sqrt{5})^3}}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{2(125 + 75\sqrt{5} + 75 + 5\sqrt{5})}}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{400 + 160\sqrt{5}}}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)



$FG=t$ とおく。このとき、 $CG=CD=1$ であるから、 $FC=1-t$ であり、さらに $\angle DFG = \angle DGF$ 、 $\angle FCD = \angle FDC$ であるから、 $DG=FD=FC$ である。 $\triangle FDG$ と $\triangle DCG$ について、 $\angle FDG = \angle DCG = 18^{\circ}$ であり、かつ $\angle DGF = \angle CGD$ (共通) であるから、 $\triangle FDG \sim \triangle DCG$ である。このとき、

$$FD : FG = DC : DG$$

$$\Leftrightarrow (1-t) : t = 1 : (1-t)$$

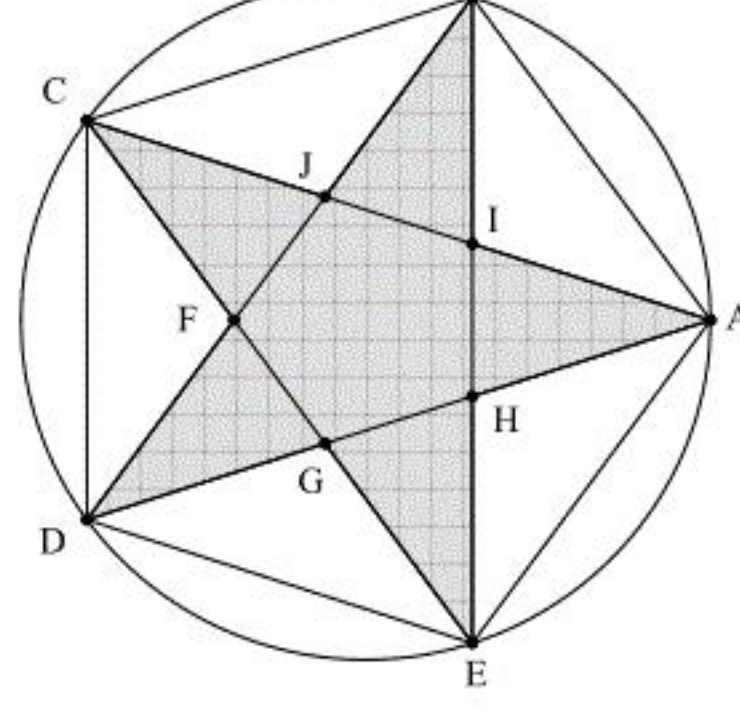
となる。よって、

$$(1-t)^2 = 1 \cdot t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。上図より、 $0 < t < 1$ であるから、 $t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ である。次に、星形 AIBJCFDGEH は、下図の斜線部である。



正五角形 ABCDE の1辺の長さは1であるから、その面積は T_2 である。よって、求める面積 S は、 $\triangle ABI$ の面積を U とおくと、

$$S = T_2 - 5U$$

で求められる。IA=IB=1-t、 $\angle AIB=108^{\circ}$ より、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \cdot (1-t)^2 \cdot \sin 108^{\circ} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (1-t)^2 \cdot \sin 72^{\circ} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sin 72^{\circ}
 \end{aligned}$$

と表される。これと②より、 S^2 を r と t を用いて表すと、

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left(5 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 72^{\circ} - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sin 72^{\circ} \right)^2 \\
 &= \frac{25}{4} (r^2 - t)^2 \sin^2 72^{\circ}
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{25}{4} (r^2 - t)^2 \sin^2 72^{\circ} \\
 &= \frac{25}{4} \cdot \sin^2 72^{\circ} \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{25}{4} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \cdot \left(\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{5} \right)^2 \\
 &= \frac{25}{4} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \cdot \frac{70 - 30\sqrt{5}}{25} \\
 &= \frac{25 - 10\sqrt{5}}{4} \\
 &= \frac{25}{4} - \frac{5}{2} \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
		1	6	1	2	0	1	0	1
	(b)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ		
		9	7	8	0	8	0		
(2)	(a)	ソ	タ	チ	ツ	テ			
		4	0	3	4	5			
	(b)	ト	ナ						
		7	7						
	(c)	ニ	ヌ						
		7	2						

【解説】

(1)(a)

はじめ、袋の中には黒球が1個、白球が1個入っている。ちょうど2回目の試行で終了するとき、1回目は白球、2回目は黒球が出るとよい。よって、

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

となる。ちょうど4回目の試行で終了するとき、1～3回目は白球、4回目は黒球が出るとよい。取り出した球が白球であったとき、取り出した白球にあらたに白球を1個加えて袋にもどすことに注意して、

$$p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

となる。同様に考えると、ちょうど k 回目($k \geq 2$)の試行で終了するとき、1～ $k-1$ 回目は白球、 k 回目は黒球が出るとよい。よって、

$$p_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(k+0)(k+1)}$$

となる。 $k=1$ のときも $p_k = \frac{1}{2}$ よりこれを満たす。

(b)

80回以上2019回以下試行を繰り返して終了する確率は

$$\sum_{k=80}^{2019} p_k$$

で表される。(a)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=80}^{2019} p_k &= \frac{1}{80 \cdot 81} + \frac{1}{81 \cdot 82} + \cdots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} \\ &= \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{81} \right) + \left(\frac{1}{81} - \frac{1}{82} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) \\ &= \frac{1}{80} - \frac{1}{2020} \\ &= \frac{101-4}{8080} \\ &= \frac{97}{8080} \end{aligned}$$

となる。

(2)(a)

はじめ、袋の中には黒球が2個、白球が4個入っている。(1)(a)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdots \frac{k}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{k+2}{k+4} \cdot \frac{2}{k+5} \\ &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 2}{(k+3)(k+4)(k+5)} \\ &= \frac{40}{(k+3)(k+4)(k+5)} \end{aligned}$$

となる。

(b)

(2)(a)より、

$$\begin{aligned} p_k &\leq \frac{1}{12800} \\ \Leftrightarrow (k+3)(k+4)(k+5) &\geq 12800 \cdot 40 \\ \Leftrightarrow (k+3)(k+4)(k+5) &\geq 80^3 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $f(k) = (k+3)(k+4)(k+5)$ とおくと、 $k \geq 1$ において $f(k)$ は明らかに単調増加である。よって、 $k+4=80$ 前後で実際に代入して大小関係を確認する。

[1] $k=76$ のとき

$$\begin{aligned} 79 \cdot 81 &= (80-1)(80+1) \\ &= 80^2 - 1 \end{aligned}$$

より、

$$79 \cdot 80 \cdot 81 < 80^3$$

が成り立つ。

[2] $k=77$ のとき

$$81 \cdot 82 > 80^2$$

より

$$80 \cdot 81 \cdot 82 > 80^3$$

が成り立つ。

以上、[1], [2]より、 $f(k)$ が単調増加であることに注意すると、

$$\begin{aligned} k \leq 76 \text{ では } (k+3)(k+4)(k+5) &< 80^3, \\ k \geq 77 \text{ では } (k+3)(k+4)(k+5) &> 80^3 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $p_k \leq \frac{1}{12800}$ を満たす最小の k の値は77である。

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} kp_k &= \sum_{k=1}^{20} \frac{40k}{(k+3)(k+4)(k+5)} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \left\{ \frac{40k+60}{(k+3)(k+4)} - \frac{40(k+1)+60}{(k+4)(k+5)} \right\} \\ &= \left(\frac{40 \cdot 1 + 60}{4 \cdot 5} - \frac{40 \cdot 2 + 60}{5 \cdot 6} \right) + \left(\frac{40 \cdot 2 + 60}{5 \cdot 6} - \frac{40 \cdot 3 + 60}{6 \cdot 7} \right) + \cdots + \left(\frac{40 \cdot 20 + 60}{23 \cdot 24} - \frac{40 \cdot 21 + 60}{24 \cdot 25} \right) \\ &= \frac{40 \cdot 1 + 60}{4 \cdot 5} - \frac{40 \cdot 21 + 60}{24 \cdot 25} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

である。

3

【解答】

(1)		ア	イ	ウ	エ		
		3	2	3	3		
(2)		オ	カ				
		4	3				
(3)	(a)	キ					
		3					
	(b)	ク	ケ	コ			
		3	4	2			

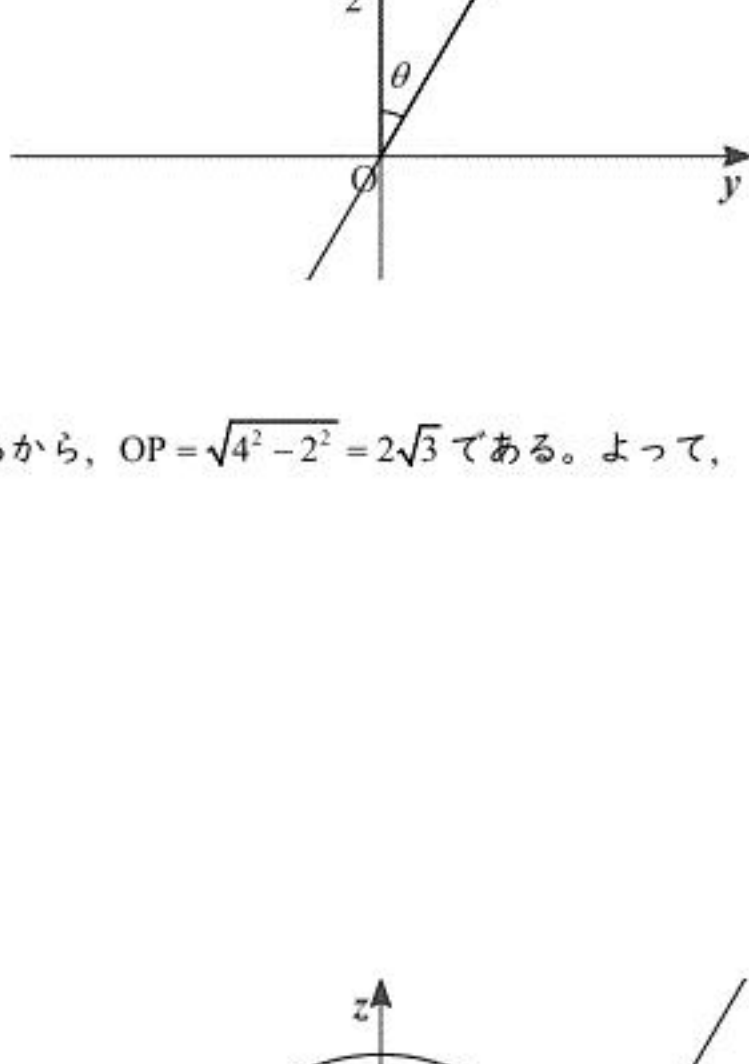
【説】

P が yz 平面上にあるとしても一般性は失われるようになる。

【解説】

(1)

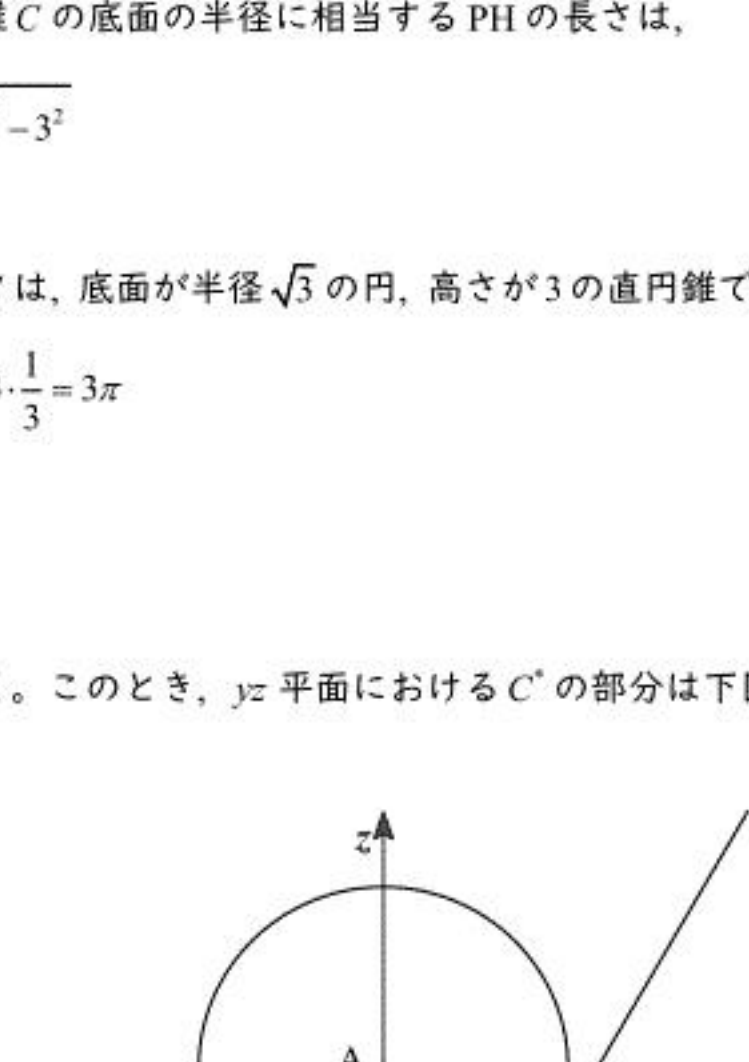
Pがyz平面上にあるとしても一般性は失われない。このとき、 $x=0$ における切断面は下図のようになる。



OA=4, PA=2であるから、 $OP=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{OP}{OA} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。



上図のように、 z 軸上に $OA \perp PH$ を満たす点Hをおくと、

$$OH = OP \cos \theta = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

である。よって、円錐Cの底面の半径に相当するPHの長さは、

$$\begin{aligned}PH &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

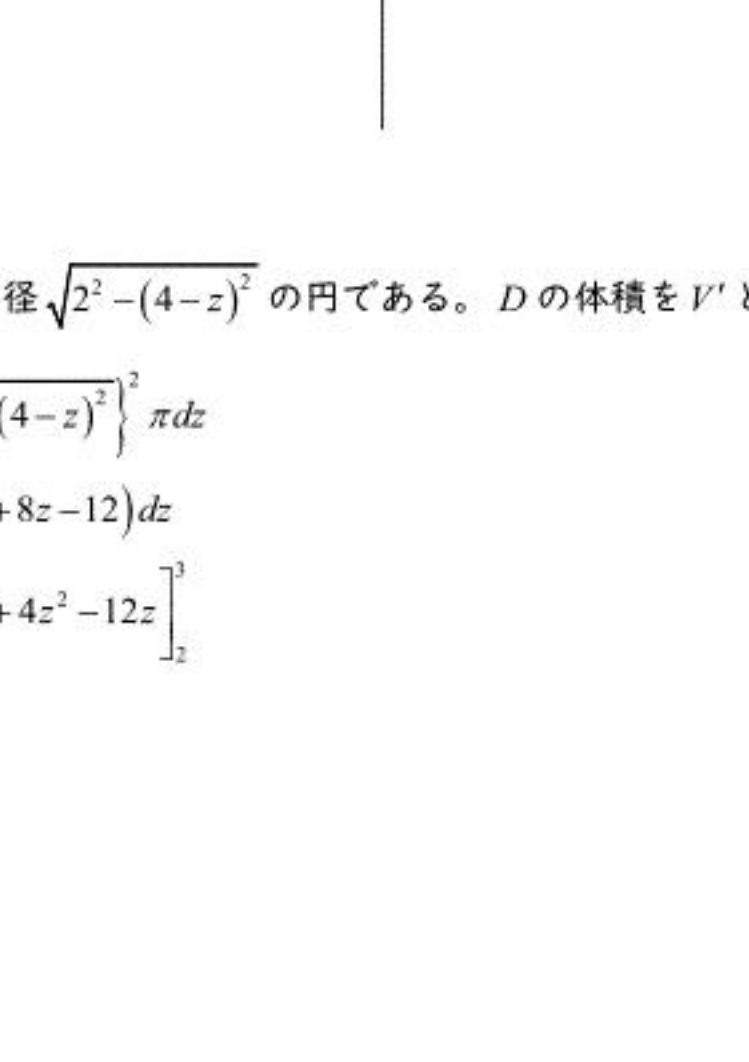
となる。このとき、Cは、底面が半径 $\sqrt{3}$ の円、高さが3の直円錐であるから、Cの体積 V_1 は、

$$V_1 = (\sqrt{3})^2 \pi \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 3\pi$$

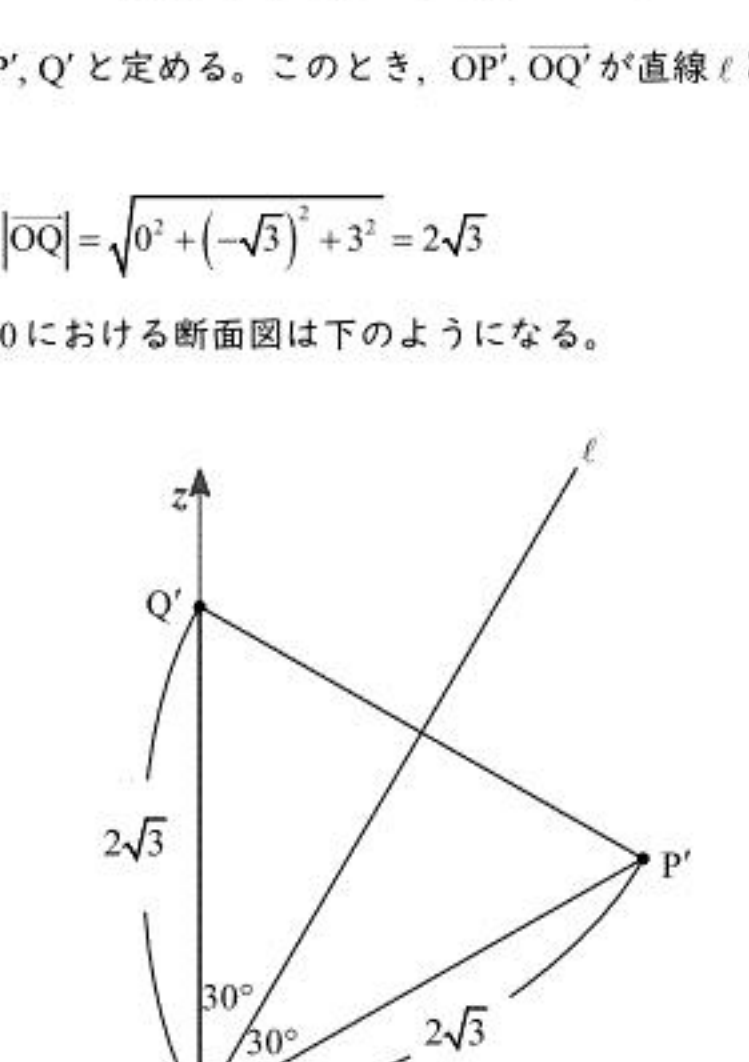
である。

(2)

点(0, 0, 2)をQとおく。このとき、yz平面におけるC'の部分は下図の斜線部のようになる。



よって、C'は、CからP, Q, Hを含む部分(Dとおく)を除くことで得られる。ここで、Dについて、 $2 \leq z \leq 3$ における断面を考える。



上図より、断面は、半径 $\sqrt{2^2-(4-z)^2}$ の円である。Dの体積を V' とおくと、

$$\begin{aligned}V' &= \int_2^3 \left\{ \sqrt{2^2 - (4-z)^2} \right\}^2 \pi dz \\ &= \pi \int_2^3 (-z^2 + 8z - 12) dz \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}z^3 + 4z^2 - 12z \right]_2^3 \\ &= \frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned}V_2 &= V_1 - V' \\ &= 3\pi - \frac{5}{3}\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

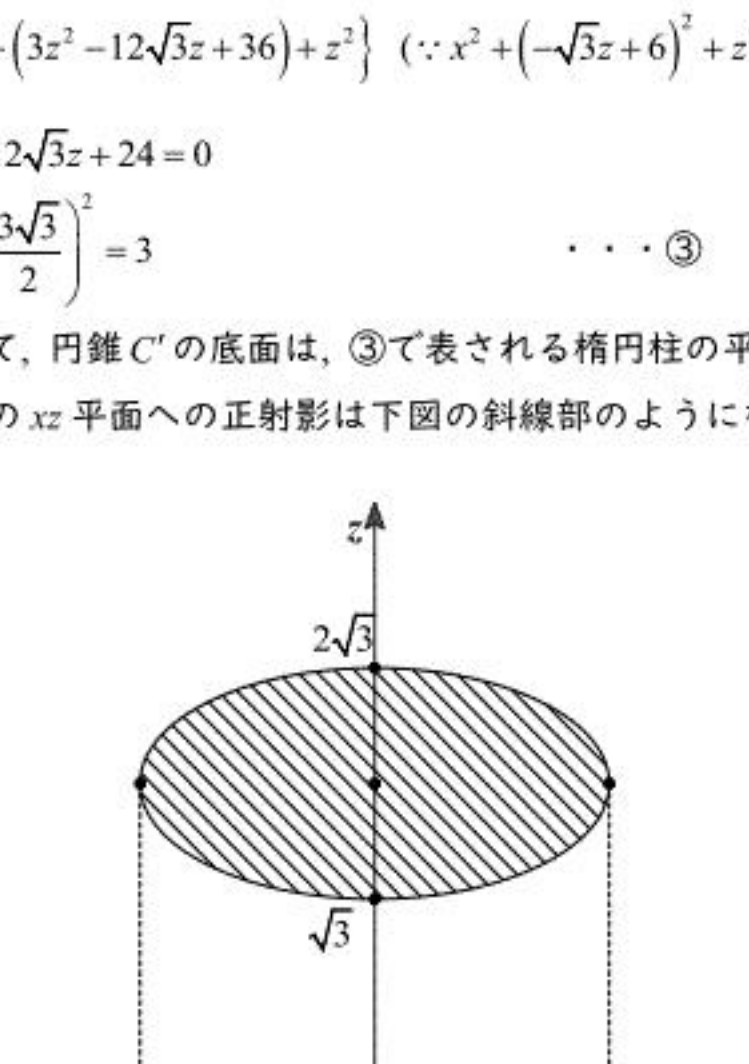
である。

(3)(a)

円錐Cの底面の円周上の点P(0, $\sqrt{3}$, 3), Q(0, $-\sqrt{3}$, 3)を定め、円錐を傾けた時に対応する円周上の点をそれぞれP', Q'と定める。このとき、 $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OQ'}$ が直線 ℓ となす角度は共に 30° であり、

$$|\overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{OQ'}| = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

であるから、平面 $x=0$ における断面図は下のようになる。



よって、 $P'(0, 3, \sqrt{3})$, $Q'(0, 0, 2\sqrt{3})$ である。このとき、円錐C'の底面を描く円の式を考える。

この円の外周上の任意の点R(x, y, z)について、2つの関係式を導く。まず、円錐Cにおいて、円錐の側面が z 軸に対してなす角度は常に 30° である。よって、円錐C'においても同様に、円錐の側面の点が軸 ℓ となす角度は 30° であるから、

$$\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OR}|} = \cos 30^\circ$$

が成り立つ。B(0, 1, $\sqrt{3}$)であるから、上の式は、

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OR}|} &= \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{0 \cdot x + 1 \cdot y + \sqrt{3} \cdot z}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow y + \sqrt{3}z &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。次に、直線 ℓ は円錐C'の底面に対して垂直な直線であるから、

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{Q'R} = 0$$

が成り立つ。それぞれ代入して解くと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{Q'R} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + \sqrt{3} \cdot (z - 2\sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow y + \sqrt{3}z &= 6 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。②を①に代入して、

$$\begin{aligned}y + \sqrt{3}z &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Leftrightarrow 6 &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + (-\sqrt{3}z + 6)^2 + z^2} \\ \Leftrightarrow 36 &= 3 \{ x^2 + (3z^2 - 12\sqrt{3}z + 36) + z^2 \} \quad (\because x^2 + (-\sqrt{3}z + 6)^2 + z^2 \geq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 + 4z^2 - 12\sqrt{3}z + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4 \left(z - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 &= 3 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

と変形できる。よって、円錐C'の底面は、③で表される楕円柱の平面②による断面図であるから、円錐C'の底面の xz 平面への正射影は下図の斜線部のようになる。



図より、 z 座標の最小値は $h=\sqrt{3}$ である。

(b)

平面 $z=\sqrt{3}$ と z 軸は垂直に交わるから、円錐C'の側面と平面 $z=\sqrt{3}$ で囲まれた領域は、円錐C'の切断面を底面とした、高さが $\sqrt{3}$ である錐である。このとき、円錐C'の切断面は、①と $z=\sqrt{3}$ を同時に満たす。①に $z=\sqrt{3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}y + \sqrt{3}z &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Leftrightarrow y + 3 &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 3} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 2y^2 - 6y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3} \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と変形できる。よって、切断面は、平面 $z=\sqrt{3}$ 上における、中心が $\left(0, \frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ 、半径が $\frac{\sqrt{6}}{2}$ である円を、 y 軸方向に $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍した楕円である。すなわち、下図の斜線部である。

以上より、円錐C'の側面と平面 $z=\sqrt{3}$ で囲まれた部分の体積 V_3 は、

$$\begin{aligned}V_3 &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \right\} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{4} \pi \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{2} \pi\end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)		ア	イ	ウ						
		6	1	0						
(2)		エ	オ	カ						
		2	1	8						
(3)	(a)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
		1	5	8	7	9	8	2	2	1
		タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
		1	3	4	1	5	8	2	2	1
		ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ			
		1	9	8	4	1	5			
	(b)	マ	ミ							
		5	7							

【解説】

(1)

【解説】

(1)

 $1 \leq x \leq 4$ において、

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= (\sqrt{3})^x \cdot \log \sqrt{3} + (\sqrt{3})^{4-x} \cdot (-1) \cdot \log \sqrt{3} \\
 &= \log \sqrt{3} \cdot \left\{ (\sqrt{3})^x - (\sqrt{3})^{4-x} \right\} \\
 &= \log \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^{-x} \cdot \left\{ (\sqrt{3})^{2x} - (\sqrt{3})^4 \right\} \\
 &= \log \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^{-x} \cdot (3^x - 9)
 \end{aligned}$$

となる。よって $t'(x) = 0$ のとき、 $x = 2$ である。また、 $x = 1, 2, 4$ のときの $t(x)$ の値はそれぞれ、

$$t(1) = (\sqrt{3})^1 + (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}$$

$$t(2) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6$$

$$t(4) = (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^0 = 10$$

である。

以上より、 $1 \leq x \leq 4$ における増減表は下のようになる。

x	1	...	2	...	4
$t'(x)$		-	0	+	
$t(x)$	$4\sqrt{3}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	10

よって、 $t(x)$ の取りうる値の範囲は $6 \leq t(x) \leq 10$ である。

(2)

$$\begin{aligned}
 \left\{ (\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{4-x} \right\}^2 &= 3^x + 2 \cdot (\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{3})^{4-x} + 3^{4-x} \\
 &= 3^x + 3^{4-x} + 18
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 3^x + 3^{4-x} &= \left\{ (\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{4-x} \right\}^2 - 18 \\
 &= (t(x))^2 - 18
 \end{aligned}$$

となる。

(3)(a)

$y = t(x)$, $g(y) = f(x)$ と定める。このとき、(1)より、 $6 \leq y \leq 10$ である。(1), (2)より、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (3^x + 3^{4-x}) - 6a \left\{ (\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{4-x} \right\} + a^2 + 2a - 3 \\
 &= \left[(t(x))^2 - 18 \right] - 6a(t(x)) + a^2 + 2a - 3 \\
 &= (t(x))^2 - 6a(t(x)) + a^2 + 2a - 21
 \end{aligned}$$

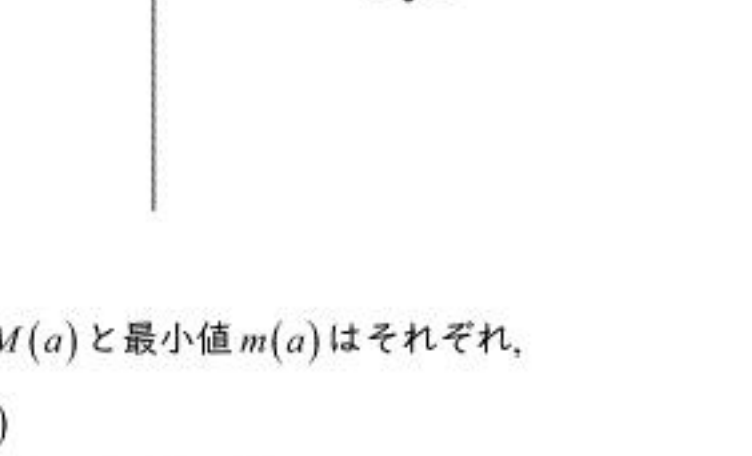
であるから、

$$\begin{aligned}
 g(y) &= y^2 - 6ay + a^2 + 2a - 21 \\
 &= (y - 3a)^2 - 8a^2 + 2a - 21
 \end{aligned}$$

となる。

[1] $2 \leq a < \frac{8}{3}$ のとき

$6 \leq 3a < 8$ であるから、最小値は $y = 3a$ でとる。このとき、グラフは下図のようになるから、最大値は $y = 10$ でとる。



よって、最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
 M(a) &= g(10) \\
 &= 100 - 60a + a^2 + 2a - 21 \\
 &= 1a^2 - 58a + 79 \\
 m(a) &= g(3a) \\
 &= -8a^2 + 2a - 21
 \end{aligned}$$

である。

[2] $\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{10}{3}$ のとき

$8 \leq 3a \leq 10$ であるから、最小値は $y = 3a$ でとる。このとき、グラフは下図のようになるから、最大値は $y = 6$ でとる。



よって、最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
 M(a) &= g(6) \\
 &= 36 - 36a + a^2 + 2a - 21 \\
 &= 1a^2 - 34a + 15 \\
 m(a) &= g(3a) \\
 &= -8a^2 + 2a - 21
 \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $\int_2^{10} (M(a) - m(a))^2 da$ について、 $2 \leq a < \frac{8}{3}$, $\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{10}{3}$ のそれぞれの範囲

における $M(a)$, $m(a)$ を代入して解くと、

$$\begin{aligned}
 \int_2^{10} (M(a) - m(a))^2 da &= \int_2^{\frac{8}{3}} \left\{ (a^2 - 58a + 79) - (-8a^2 + 2a - 21) \right\}^2 da \\
 &\quad + \int_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}} \left\{ (a^2 - 34a + 15) - (-8a^2 + 2a - 21) \right\}^2 da \\
 &= \int_2^{\frac{8}{3}} (9a^2 - 60a + 100)^2 da + \int_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}} (9a^2 - 36a + 36)^2 da \\
 &= \int_2^{\frac{8}{3}} (3a - 10)^4 da + \int_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}} (3a - 6)^4 da \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \left[(3a - 10)^5 \right]_2^{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \left[(3a - 6)^5 \right]_{\frac{8}{3}}^{\frac{10}{3}} \\
 &= \frac{1}{15} \left\{ (-2)^5 - (-4)^5 \right\} + \frac{1}{15} \left\{ 4^5 - 2^5 \right\} \\
 &= \frac{1}{15} \cdot 2(4^5 - 2^5) \\
 &= \frac{2(1024 - 32)}{15} \\
 &= \frac{1984}{15}
 \end{aligned}$$

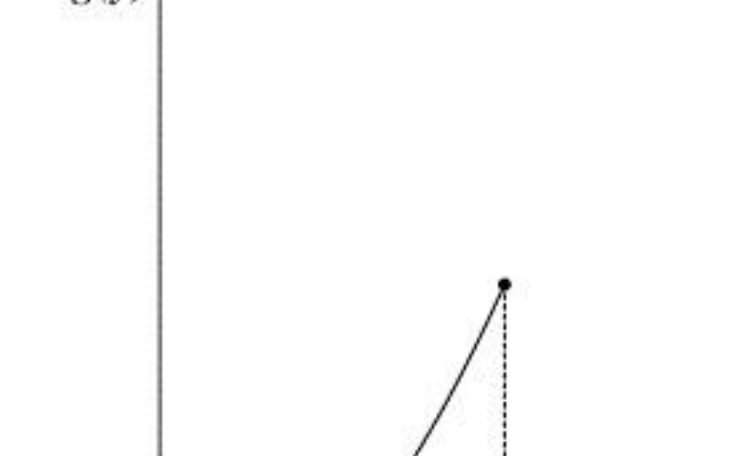
となる。

(b)

$m(a)$ について、 a の値に応じて場合分けをする。

[1] $0 < a \leq 2$ のとき

$0 < 3a \leq 6$ であるから、グラフは下図のようになる。



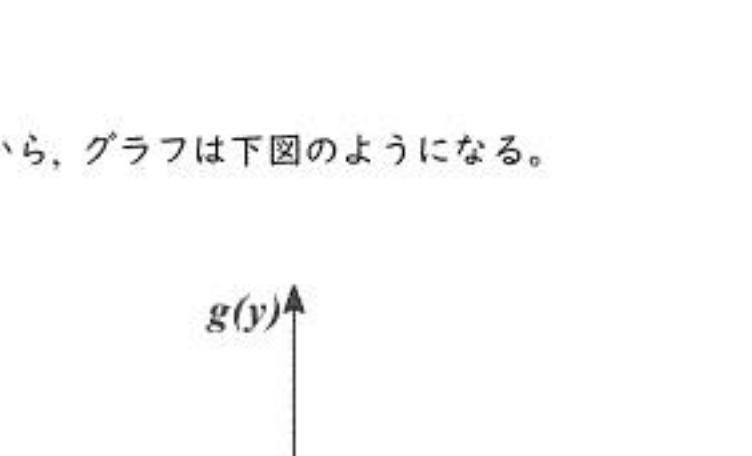
よって、 $m(a) = g(6) = a^2 - 34a + 15$ である。

[2] $2 \leq a \leq \frac{10}{3}$ のとき

(3)(a)より、 $m(a) = g(3a) = -8a^2 + 2a - 21$ である。

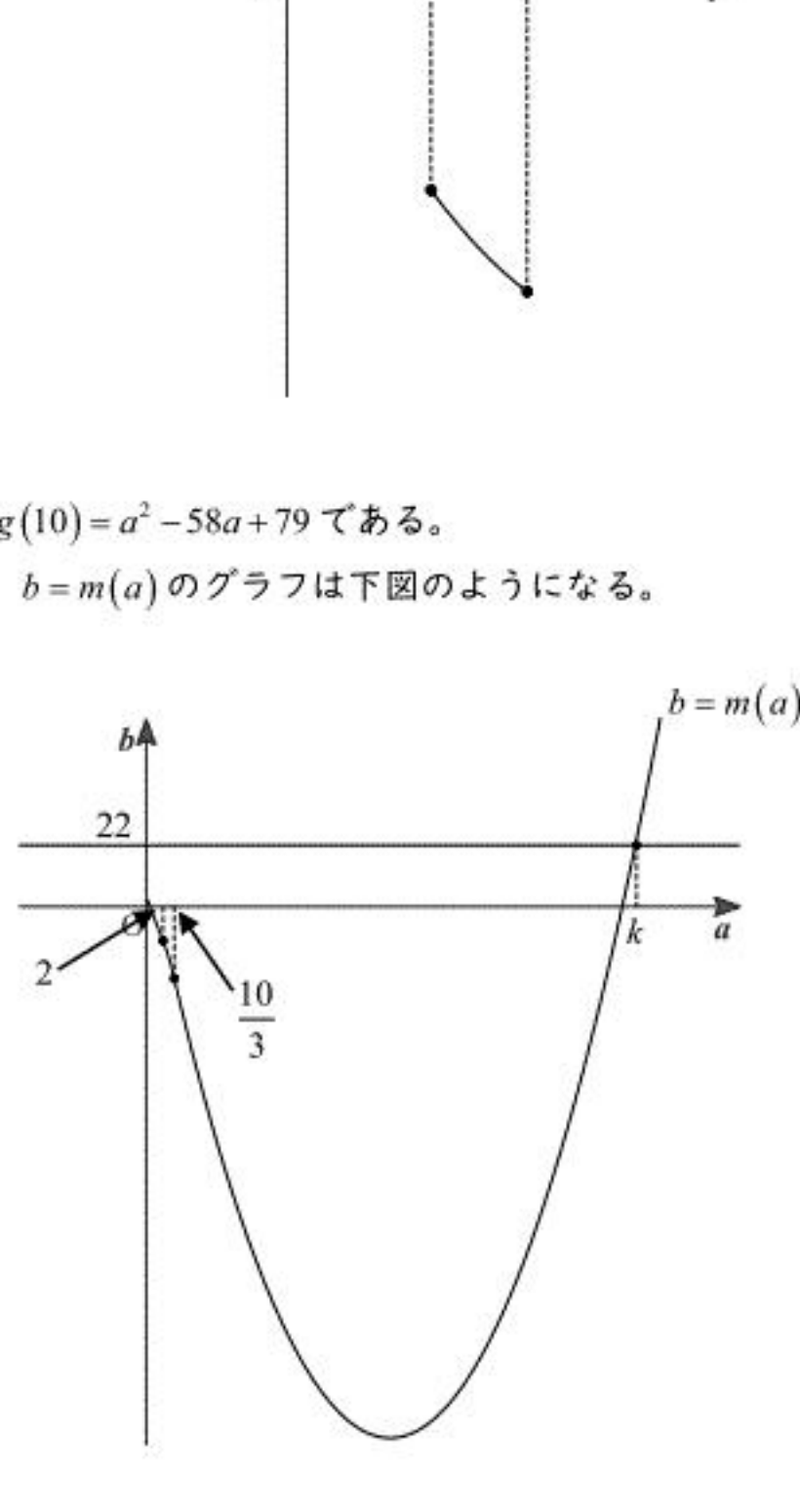
[3] $\frac{10}{3} \leq a$ のとき

$10 \leq 3a$ であるから、グラフは下図のようになる。



よって、 $m(a) = g(10) = a^2 - 58a + 79$ である。

以上、[1], [2], [3]より、 $b = m(a)$ のグラフは下図のようになる。



グラフより、 $b = m(a)$ のグラフと、 $b = 22$ の直線は、 $\frac{10}{3} \leq a$ において交点を持つ。交点の a 座標を k とおくと、

$$\begin{aligned}
 k^2 - 58k + 79 &= 22 \\
 \Leftrightarrow k^2 - 58k + 57 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (k - 1)(k - 57) &= 0 \\
 \Leftrightarrow k &= 1, 57
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{10}{3} \leq a$ の範囲で条件を満たす k の値は $k = 57$ である。ゆえに、 $m(a) \geq 22$ となる a の範囲は、

$$a \geq 57$$

である。